

1 Phép chiếu vuông góc

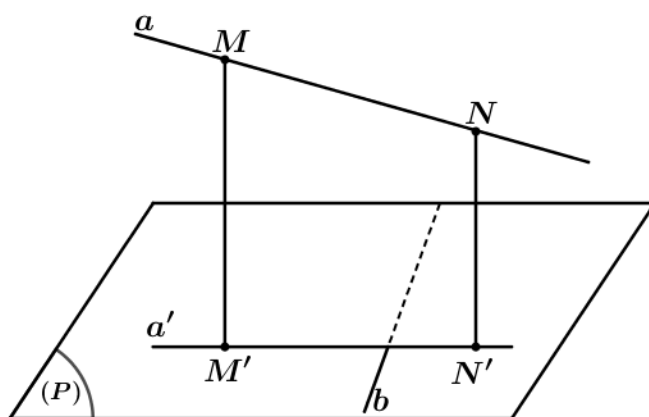
- Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) .

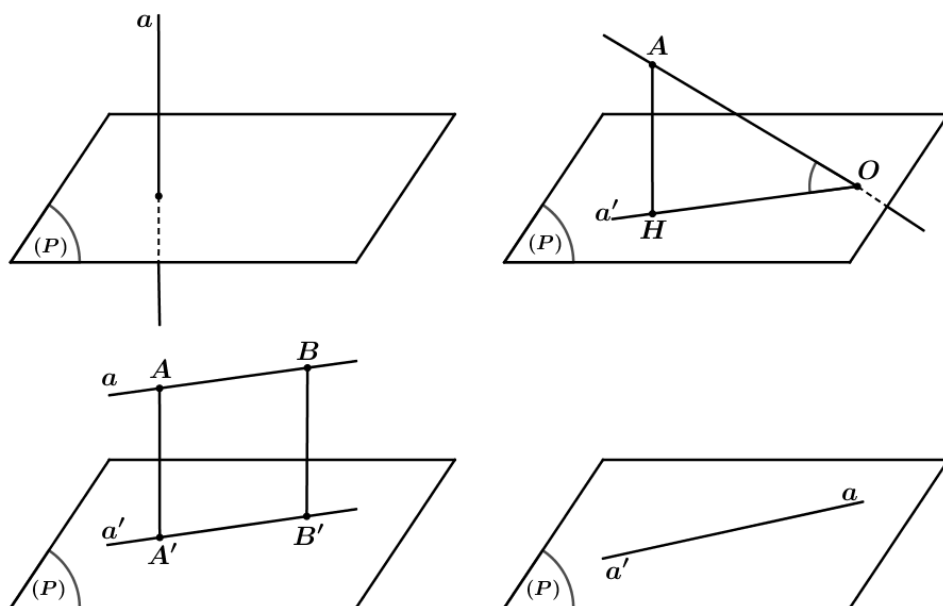
Chú ý:

- Phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P) . Hình chiếu vuông góc H' của hình H trên mặt phẳng (P) còn được gọi là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P) .

Định lý ba đường vuông góc:

- Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) không vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) .

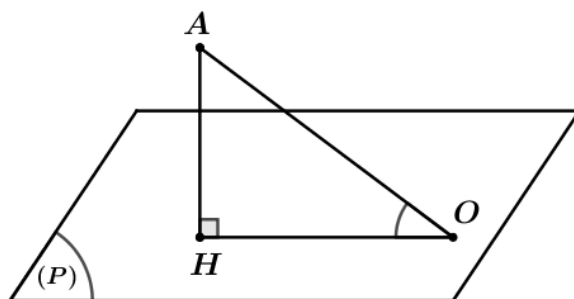




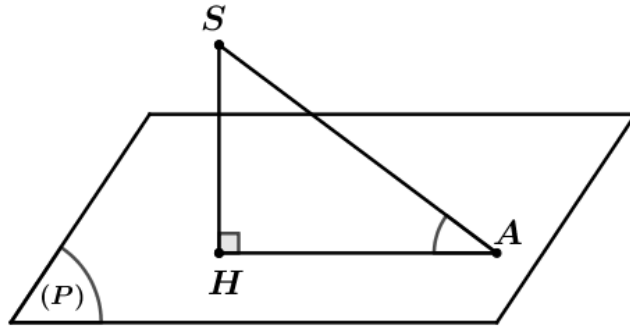
- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° .
- Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

Chú ý: Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Nhận xét:



- Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P) . Lấy điểm O thuộc mặt phẳng (P) , O không trùng H . Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc AOH .

Dạng 1: Xác định góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy

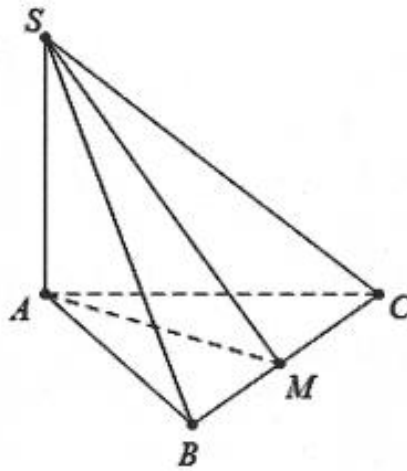
Tìm góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC)

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy (ABC) .
- Như vậy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC) .
- Vậy $(SA; (ABC)) = (SA; HA) = \angle SAH$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, SB tạo với đáy một góc 60° và M là trung điểm của BC .

- Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .
- Tính cosin góc giữa SM và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



- Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SB; (ABC)) = \angle SBA = 60^\circ$.

Do đó $SA = AB \tan \angle SBA = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a; (SC; (ABC)) = \angle SCA$.

$$\text{Khi đó: } \cos \angle SCA = \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3a^2 + 4a^2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

- Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SM; (ABC)) = \angle SMA = \varphi$.

$$\text{Ta có: } AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

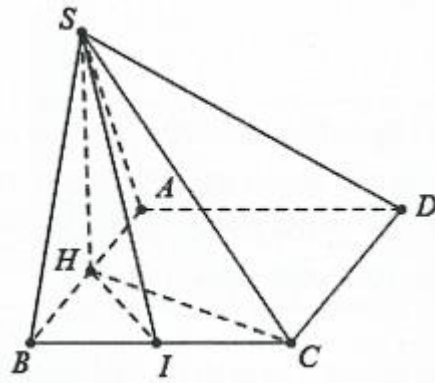
$$\text{Khi đó } \cos \varphi = \frac{AM}{SM} = \frac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\sqrt{133}}{19}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a$; $AD = a$. Tam giác SAB đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Tính góc giữa SB, SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi I là trung điểm của BC . Tính tan góc giữa SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a) Gọi H là trung điểm của AB ta có: $SH \perp AB$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Tam giác SAB đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow (SB; (ABCD)) = SBH = 60^\circ$

$$(SC; (ABCD)) = SCH \text{ và } \tan SCH = \frac{SH}{HC} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{b) Ta có: } HI = \sqrt{HB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

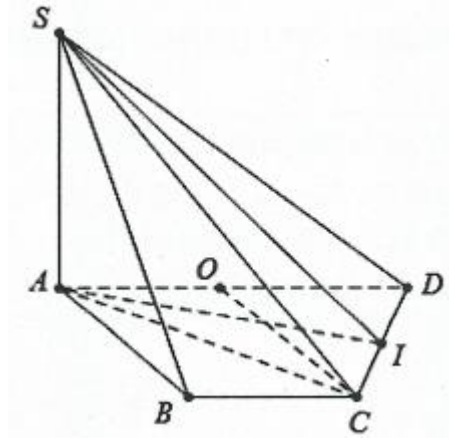
$$\text{Mặt khác } (SI; (ABCD)) = SIH \text{ và } \tan SIH = \frac{SH}{SI} = a\sqrt{3} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a , $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 45° .

a) Tính cosin góc tạo bởi các cạnh SC, SD và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Gọi I là trung điểm của CD , tính tan góc tạo bởi SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của $AD \Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh $a \Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C .

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SB; (ABCD)) = SBA = 45^\circ$.

Do đó $SA = AB \tan 45^\circ = a$

$$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos(SB; (ABC)) = \cos SCA$$

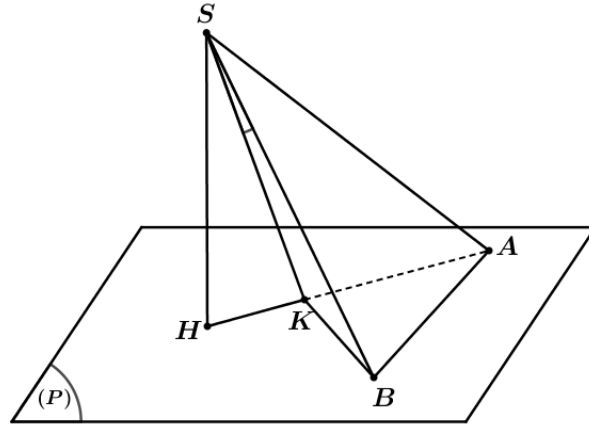
$$= \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos(SD; (ABCD)) = \cos SDA = \frac{AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{b) Ta có: } AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Do đó } \tan(SI; (ABCD)) = \tan SIA = \frac{SA}{AI} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Dạng 2: Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng chứa đường cao



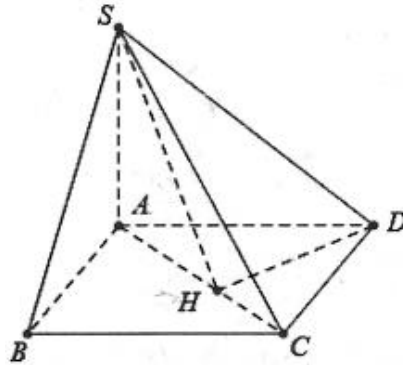
Tìm góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (SHA) với $(SHA) \perp (ABH)$.

- Dựng $BK \perp AH$, có $BK \perp SH \Rightarrow BK \perp (SHA)$.
- Suy ra K là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAH) .
- Vậy $(SB; (SAH)) = (SB; SK) = BSK$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc tạo bởi:

- a) SC và mặt phẳng (SAB) ; SC và mặt phẳng (SAD) .
- b) SD và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải



a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC; (ABCD)) = SCA = 60^\circ$.

Lại có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{13} \\ SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{15} \\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4a \end{cases}$$

Do $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow (SC; (SAB)) = CSB$. Mặt khác $\cos CSB = \frac{SB}{SC} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

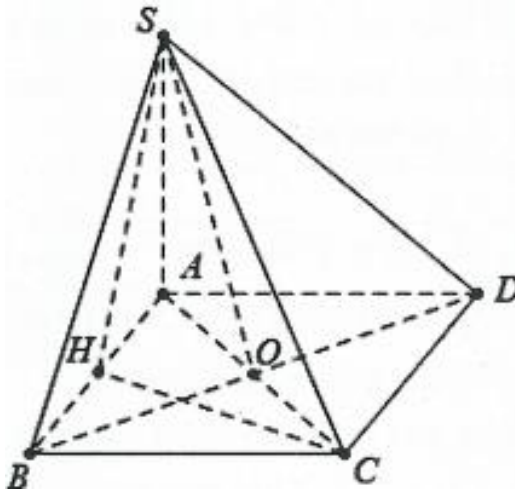
Tương tự $CD \perp (SAD) \Rightarrow (SC; (SAD)) = CSD$ và $\cos CSD = \frac{SD}{SC} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a , $BD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc 60° . Tính tan góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB) .

b) SD và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải



a) Ta có: $AC \perp BD$ tại O . Khi đó $OA = OC, OB = OD$.

Xét tam giác vuông OAB ta có: $\sin OAB = \frac{OB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OAB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều cạnh a .

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC; (ABCD)) = \angle SCA = 60^\circ$.

Suy ra $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow (SC; (SAB)) = \angle CSH$.

Do $\triangle ABC$ đều cạnh a nên H là trung điểm của AB .

Ta có: $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan CSH = \frac{CH}{SH}$ trong đó $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan CSH = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{13}$.

b) Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow (SD; (SAC)) = \angle DSO$ và $\tan DSO = \frac{OD}{SO}$.

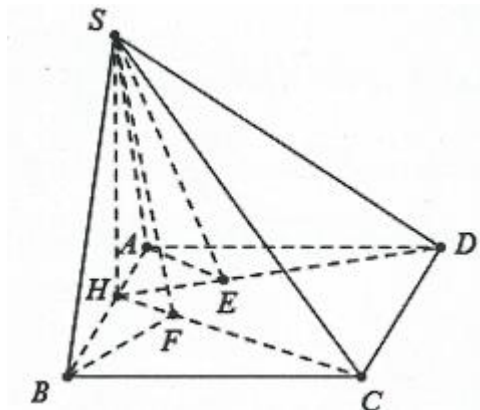
Trong đó $OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \tan DSO = \frac{\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HA}$. Biết $AB = 3, AD = 6$ và $SH = 2$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SHD) .

b) SB và mặt phẳng (SHC) .

Lời giải



a) Ta có: $AH = 1, HB = 2 \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{5} \\ SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Dựng $AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow (SA; (SHD)) = ASE$

Mặt khác $AE = \frac{AH \cdot AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{6}{\sqrt{37}}$

Suy ra $\tan ASE = \frac{AE}{SA} = \frac{6}{\sqrt{185}}$.

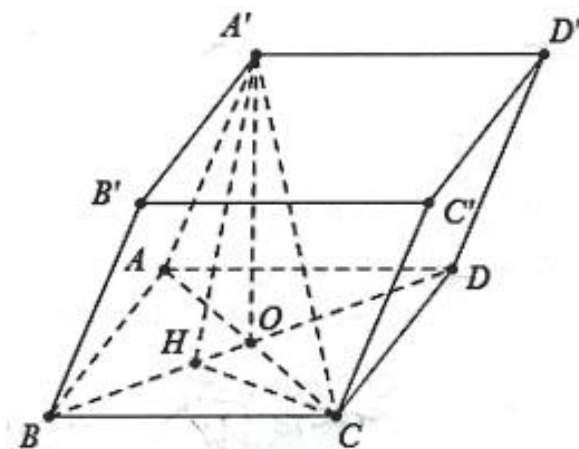
b) Dựng $BF \perp HC \Rightarrow BF \perp (SHC)$.

Khi đó $(SB; (SHC)) = BSF$, $BF = \frac{BH \cdot BC}{\sqrt{BH^2 + BC^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Ta có: $\tan(SB; (SHC)) = \tan BSF = \frac{BF}{SB} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = 2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình chữ nhật $ABCD$, biết cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60° . Tính cosin góc tạo với $A'C$ và mặt phẳng $(A'BD)$

Lời giải



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4a \Rightarrow OA = 2a = OC$.

Do $A'O \perp (ABCD) \Rightarrow (A'O; (ABCD)) = A'AO = 60^\circ \Rightarrow A'O = OA \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

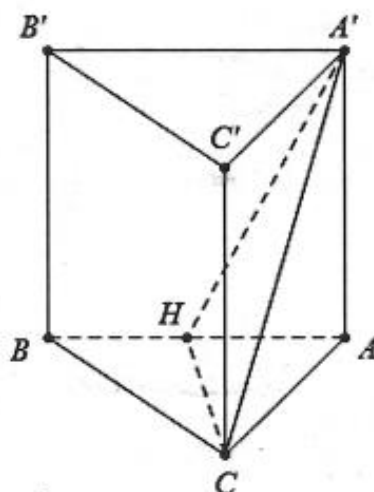
Dựng $CH \perp BD \Rightarrow CH \perp (A'BD) \Rightarrow (A'C; (A'BD)) = CA'H$.

Ta có: $CH = \frac{BC \cdot CD}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = a\sqrt{3}$, $A'C = \sqrt{OA'^2 + OC^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a$.

Suy ra $\cos CA'H = \frac{A'H}{A'C} = \frac{\sqrt{A'C^2 - HC^2}}{A'C} = \frac{\sqrt{16a^2 - 3a^2}}{4a} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Tính góc tạo bởi $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ biết $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



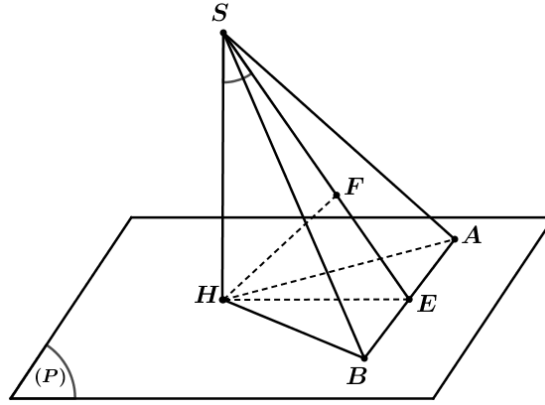
Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABB'A') \Rightarrow (A'C; (ABB'A')) = CA'H$.

Lại có: $A'H = \sqrt{AA'^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\tan CA'H = \frac{CH}{A'H} = 1 \Rightarrow CA'H = 45^\circ$.

Vậy $(A'C; (ABB'A')) = CA'H = 45^\circ$.

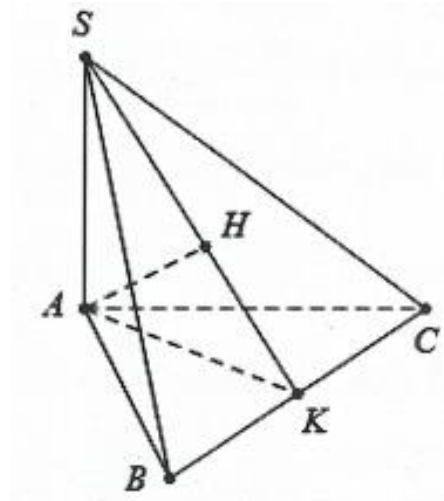


Tìm góc giữa đường cao SH và mặt phẳng (SAB) .

- Dụng $HE \perp AB, HF \perp SE$.
- Ta có: $AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HF$.
- Mặt khác $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAB) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAB)
- Vậy $(SH; (SAB)) = (HF; SF) = HSF$.

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



Từ A kẻ AK vuông góc với BC tại K . Ta có: $SA \perp BC$ và $AK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAK)$.

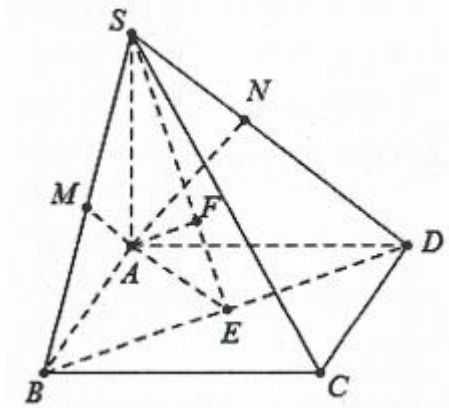
Kẻ $AH \perp SK, H \in SK$. Mà $BC \perp AH$ suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow (SA; (SBC)) = ASH = ASK$.

Tam giác SAK vuông tại A , có $SA = AK = a\sqrt{3} \Rightarrow$ tam giác SAK vuông cân tại A nên $ASK = 45^\circ$.

Vậy $(SA; (SBC)) = 45^\circ$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC), (SBD)$ và (SCD) .

Lời giải



Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Dựng $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC) .

Khi đó: $(SA; (SBC)) = \angle ASM = \angle ASB = \alpha$.

Do đó $\tan \alpha = \frac{AB}{SA} = \frac{1}{2}$.

Tương tự ta có: $(SA; (SCD)) = \angle ASD = \beta$ và $\tan \beta = \frac{AD}{SA} = 1$.

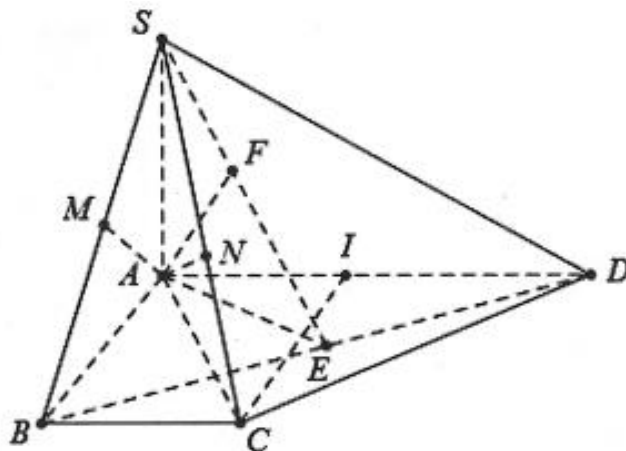
Dựng $AE \perp BD, AF \perp SE$ ta có: $\begin{cases} BD \perp AE \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AF$.

Mặt khác $AF \perp SE \Rightarrow AF \perp (SBD) \Rightarrow (SA; (SBD)) = \angle ASF = \angle ASE$.

Khi đó $\tan \angle ASE = \frac{AE}{SA}$, trong đó $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \angle ASE = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc 60° . Tính $\tan$ góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC), (SCD)$ và (SBD) .

Lời giải



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$. Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC; (ABCD)) = \angle SCA = 60^\circ$.

Suy ra $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$.

Dựng $AM \perp SB$, có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC) .

Suy ra: $(SA; (SBC)) = \angle ASM = \angle ASB$.

Ta có: $\tan \angle ASB = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI = \frac{AD}{2} = a \Rightarrow \triangle ACD$ vuông

tại C . Khi đó $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

Dựng $AN \perp SC \Rightarrow (SA; (SCD)) = \angle ASN = \angle ASC$. Ta có: $\tan \angle ASC = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dựng $\begin{cases} AE \perp BD \\ AF \perp SE \end{cases} \Rightarrow (SA; (SBD)) = \angle ASF = \angle ASE$.

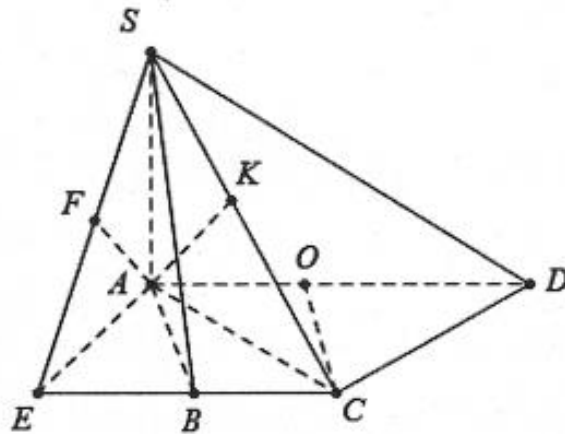
Mặt khác $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \angle ASE = \frac{AE}{SA} = \frac{\sqrt{30}}{15}$.

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a , $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60° .

a) Tính $\tan$ góc tạo bởi SA và (SBC) .

b) Tính góc tạo bởi SA và (SCD) .

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của $AD \Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh $a \Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C .

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SB; (ABCD)) = \angle SBA = 60^\circ$.

$\Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}, AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$.

Dựng $AE \perp BC, AF \perp SE \Rightarrow (SA; (SBC)) = \angle ASF = \angle ASE$.

Do $\angle ABE = 120^\circ \Rightarrow \angle ABE = 60^\circ$.

Mặt khác $AE = AB \sin ABE = AB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan(SA; (SBC)) = \tan ASE = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{2}$.

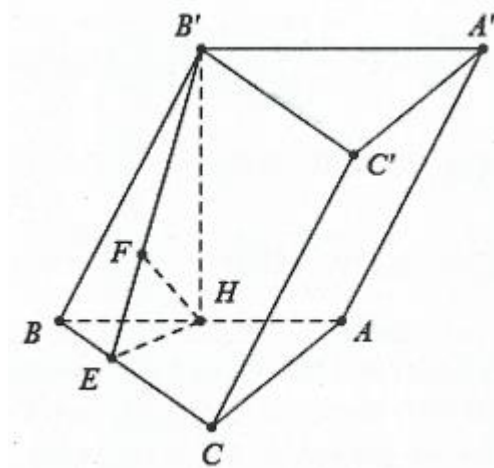
b) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Khi đó $(SA; (SCD)) = ASK = ASC = \varphi$.

Ta có: $\tan \varphi = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$. Vậy $(SA; (SCD)) = 45^\circ$.

Ví dụ 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB , đường cao $B'H = \frac{3a}{4}$. Tính cosin góc giữa đường thẳng $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

Lời giải



Dựng $HE \perp BC, HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$

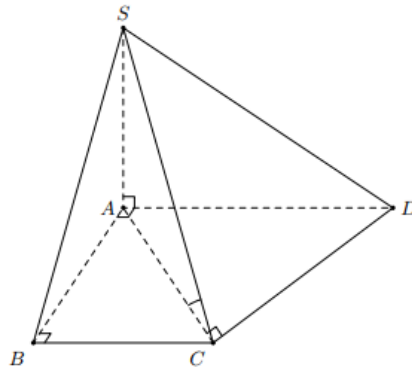
Suy ra: $BC \perp HF \Rightarrow HF \perp (B'BCC') \Rightarrow (B'H; (BCC'B')) = HB'F = HB'E$.

Ta có: $HE = HB \sin HBE = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos HB'E = \frac{B'H}{B'E} = \frac{B'H}{\sqrt{B'H^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a, CD = a$ và tam giác ACD vuông tại C , cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SCA .

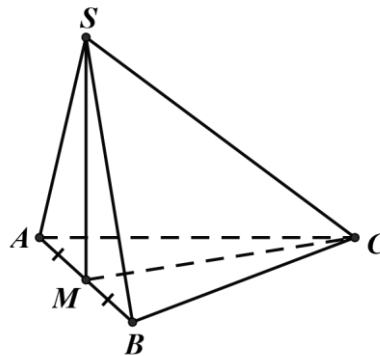
Tam giác ACD vuông tại C nên ta có $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông cân tại A nên $SCA = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , gọi M là trung điểm AB . Biết $SM \perp (ABC)$ và tam giác SAB đều. Tính góc giữa SC và (ABC)

Lời giải



Vì $SM \perp (ABC)$ nên $(SC; (ABC)) = (SC; MC) = SCM$.

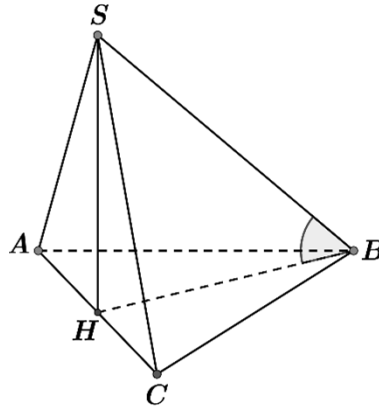
Đáy là tam giác vuông tại C nên $CM = \frac{1}{2}AB$.

Tam giác SAB đều nên $SM = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SMC$ vuông tại M : $\tan SCM = \frac{SM}{MC} = \sqrt{3} \Rightarrow SCM = 60^\circ$. Vậy $(SC; (ABC)) = 60^\circ$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $AB = AC = a$, mặt bên (SAC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa SB và mặt phẳng đáy

Lời giải



Gọi H là trung điểm AC . Ta có
$$\begin{cases} (SAC) \perp (ABC) \\ (SAC) \cap (ABC) = AC \Rightarrow SH \perp (ABC) \text{ tại } H, \text{ mà} \\ SH \perp AC \end{cases}$$

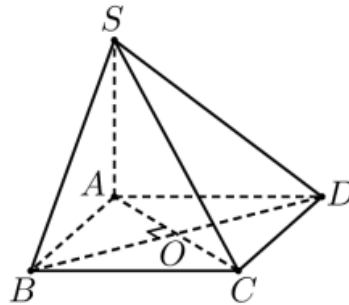
$SB \cap (ABC) = B$ nên suy ra HB là hình chiếu của SB trên (ABC) .

Suy ra $[SB, (ABC)] = (SB, HB) = SBH$.

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \tan SBH = \tan [SB, (ABC)] = \frac{SH}{HB} = 1.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC)

Lời giải



Ta có:
$$\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC).$$

Do đó: SO là hình chiếu vuông góc của SD trên (SAC) .

Khi đó: Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng góc DSO .

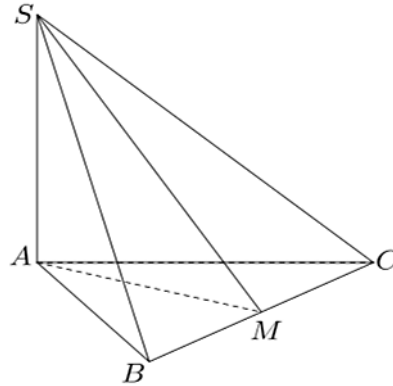
Đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $BD = 2\sqrt{2}a \Rightarrow DO = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}a$.

Tam giác SAD vuông cân tại A nên $SD = 2a\sqrt{2}$.

Tam giác SOD vuông tại O nên $\sin DSO = \frac{DO}{SD} = \frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{2}a} = \frac{1}{2} \Rightarrow DSO = 30^\circ$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a}{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Xác định góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC)

Lời giải

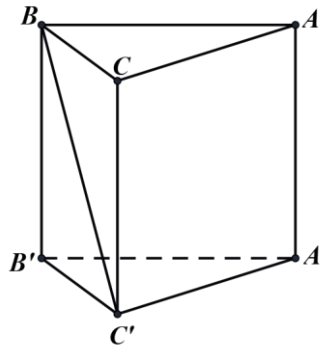


Ta có $AM \perp BC$ mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SM \Rightarrow$ góc giữa SM và (ABC) bằng SMA

$$\Delta SMA \text{ vuông tại } A \text{ có } \tan SMA = \frac{SA}{AM} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SMA = 60^\circ.$$

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $AA' = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'B'C')$

Lời giải



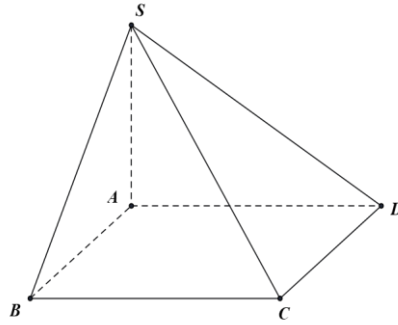
Ta có: $(BC'; (A'B'C')) = (BC'; B'C') = BC'B'$.

$$B'C' = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \Rightarrow B'C' = BB' = 2a. \text{ Suy ra } \Delta BB'C' \text{ vuông cân tại } B'.$$

Do đó $BC'B' = 45^\circ$. Vậy $(BC'; (A'B'C')) = 45^\circ$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



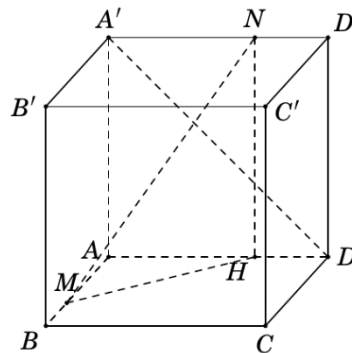
Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SDA .

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a.$$

Tam giác SAD vuông cân tại A nên $SDA = 45^\circ$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt trên các cạnh $AB, A'D'$ sao cho $MN = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên cạnh AD .

Khi đó ta có $NH \perp (ABCD) \Rightarrow (MN, (ABCD)) = NMH$.

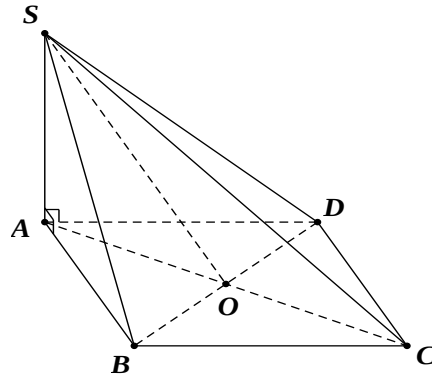
$$NH = DD' = a.$$

$$\Delta NMH \text{ vuông tại } H : \sin NMH = \frac{NH}{NM} = \frac{a}{\frac{2\sqrt{3}a}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } (MN, (ABCD)) = NMH = 60^\circ.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , ΔABD đều cạnh $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Ta có: $ABCD$ là hình thoi có tâm là $O \Rightarrow O$ là trung điểm của BD .

Mà $\triangle ABD$ đều nên $AO \perp BD$

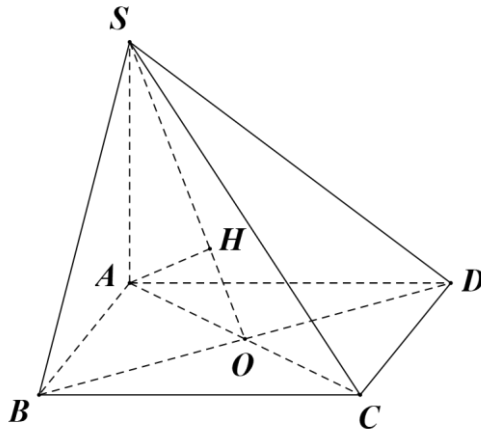
Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SO, (ABCD)) = SOA$

$$\text{Xét } \triangle ABO \text{ có: } AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Ta có: } \tan SAO = \frac{SA}{AO} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SOA = 60^\circ$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $ABC = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



Do $SA \perp BD, AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên SO . Khi đó $AH \perp SO, AH \perp BD \Rightarrow AH \perp (SBD)$.

Do đó hình chiếu của SA xuống (SBD) là SH .

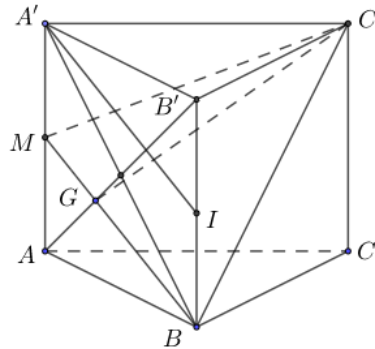
Vậy góc giữa SA và (SBD) là $ASH = ASO$.

Ta có $\triangle ABC$ đều cạnh $2a \Rightarrow AO = a$

$$\text{Xét } \triangle SAO \text{ có } \tan ASO = \frac{OA}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ASO = 30^\circ.$$

Câu 11: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) .

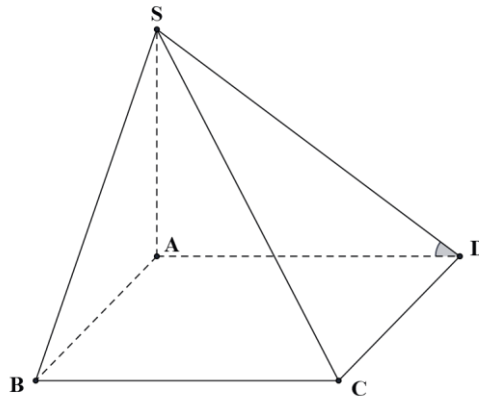
Ta có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow BB' \perp (ABC)$, $AB' \cap (ABC) = A$
 $\Rightarrow (AB', (ABC)) = B'AB$.

Tam giác $B'AB$ vuông cân tại B nên $B'AB = 45^\circ$.

Vậy $(AB', (ABC)) = 45^\circ$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là A

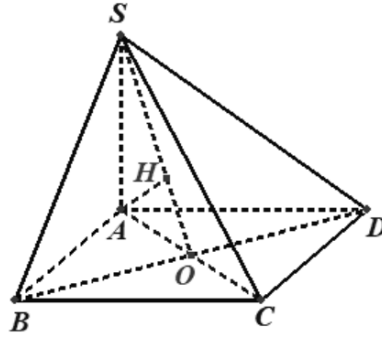
Suy ra hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AD .

Do vậy $[SD; (ABCD)] = (SD; AD) = SDA$.

Ta có $\tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SDA = 60^\circ$ hay $[SD; (ABCD)] = 60^\circ$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh $2a$, $ABC = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, H là hình chiếu của A trên SO .

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = a.$$

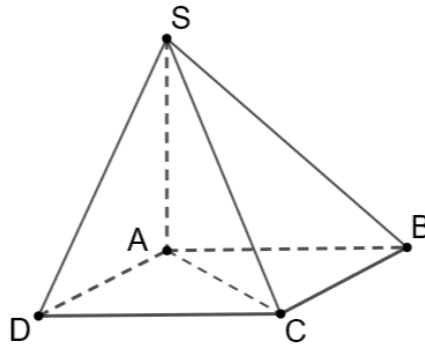
Ta có $BD \perp AO, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AH$. Mà $SO \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBD)$

$$\Rightarrow (SA, (SBD)) = (SA, SH) = ASH = ASO.$$

$$\text{Khi đó: } \tan ASO = \frac{SA}{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow ASO = 60^\circ.$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = \frac{\sqrt{6}a}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Ta có: AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên

$$(SC; (ABCD)) = (SC; AC) = SCA.$$

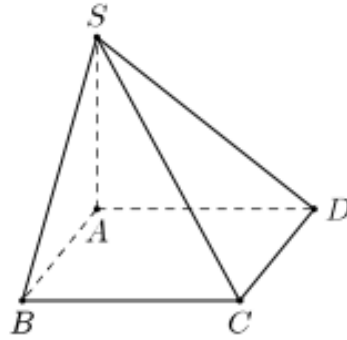
$$\text{Xét tam giác } SAC \text{ vuông tại } A \text{ có } AC = a\sqrt{2}; SA = \frac{\sqrt{6}a}{3} \text{ nên } \tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Suy ra $SCA = 30^\circ$.

$$\text{Vậy } (SC; (ABCD)) = 30^\circ.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Ta có $(SD; (ABCD)) = (SD; AD) = SDA$.

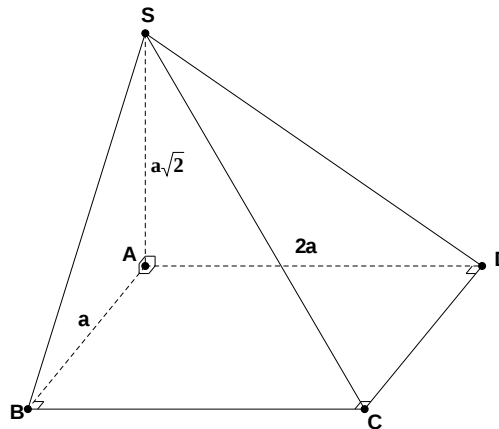
Xét $\triangle SAB$ vuông tại $A \Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$.

Xét $\triangle SAD$ vuông cân tại A (vì $SA = AD = 2a$).

Vậy $SDA = 45^\circ$.

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp BC$.

Mà $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$.

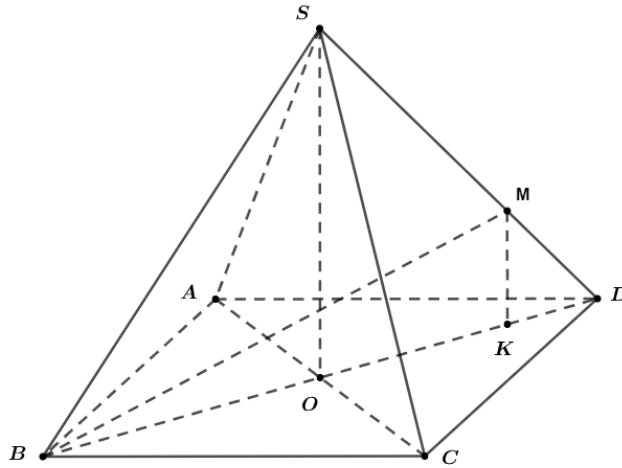
Do đó $BC \perp (SAB)$ nên $(SC, (SAB)) = CSB$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan CSB = \frac{BC}{SB} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CSB = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Tính giá trị tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Có $ABCD$ là hình vuông; $BD = a\sqrt{2}$; $OD = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Trong $\triangle SOD$ dựng $MK \perp SO$ suy ra $MK \perp (ABCD)$; $\frac{MK}{SO} = \frac{MD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MK = \frac{SO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

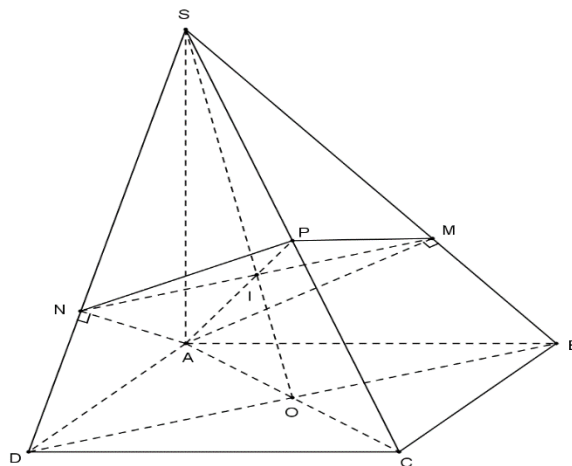
Ta có góc giữa BM và $(ABCD)$ bằng MBK ; $\tan MBK = \frac{MK}{BK}$

$$BK = BO + OK = OD + \frac{2OD}{3} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Suy ra: } \tan MBK = \frac{MK}{BK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{6}}{\frac{5a\sqrt{2}}{6}} = \frac{1}{5}$$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M ; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN)

Lời giải



Gọi $P = SC \cap (AMN)$; $O = AC \cap BD \Rightarrow MN$; AP ; SO đồng quy tại I

Ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

Mà $AM \perp SB$ nên $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

$$\begin{cases} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$$

Mà $AN \perp SD$ nên $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$

Do đó $SC \perp (AMN) \Rightarrow AP \perp SC$ và PM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (AMN) hay PM là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (AMN)

$$\Rightarrow (SB; (AMN)) = (SB; PM) = SMP \text{ (do tam giác } SMP \text{ vuông tại } P)$$

Từ gt $\Rightarrow$ Tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow P$ là trung điểm SC

$\Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác SAC

Lại có: $\triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow SA = SB$ và $AM = AN \Rightarrow \triangle SAM = \triangle SAN$

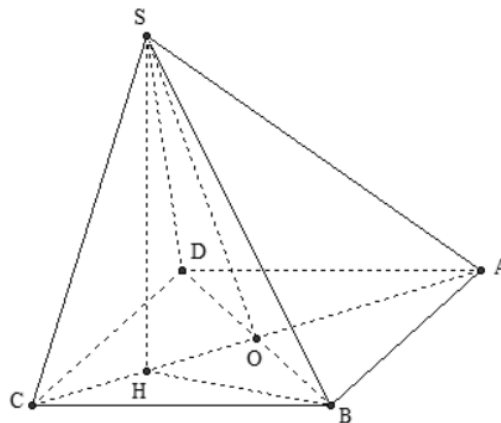
$$\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow SM = \frac{2}{3}SB = \frac{2}{3}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Mặt khác } SP = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = a$$

$$\text{Do đó } \sin SMP = \frac{SP}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (SB; (AMN)) = SMP = 60^\circ.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $BAD = 60^\circ$, tam giác SBD là tam giác đều, $SA = 2SC$. Tính cosin của góc hợp bởi đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Đặt $AB = a$. Suy ra $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ mà $BD \subset (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$

Suy ra hình chiếu H của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ thuộc giao tuyến AC .

$$\text{Mặt khác: } SO^2 = \frac{SA^2 + SC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = \frac{5SC^2}{2} - \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow SC^2 = \frac{3a^2}{5} \Leftrightarrow SC = \frac{a\sqrt{15}}{5} \Leftrightarrow SA = \frac{2a\sqrt{15}}{5}.$$

Ta có: $SC^2 + SA^2 = \frac{15a^2}{25} + \frac{60a^2}{25} = \frac{75a^2}{25} = 3a^2 = AC^2$, suy ra: ΔSAC vuông tại S .

$$SH.AC = SA.SC \Leftrightarrow SH = \frac{SA.SC}{AC} = \frac{a\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{2a\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{1}{a\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.$$

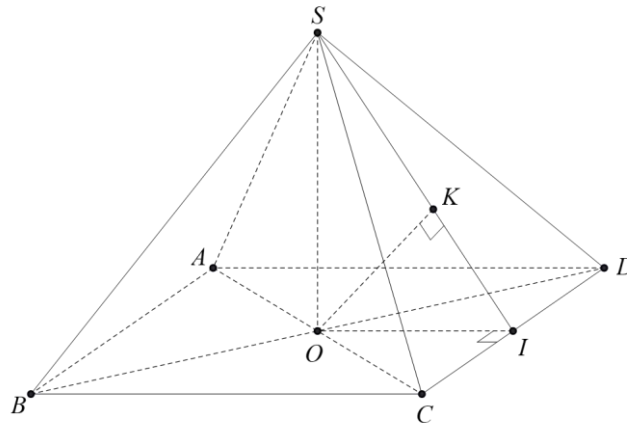
Vì $SH \perp (ABCD)$ nên HB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên

$$(SB; (ABCD)) = SBH.$$

$$\sin SBH = \frac{SH}{SB} = \frac{2a\sqrt{3}}{5a} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \cos SBH = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{12}{25}} = \frac{\sqrt{13}}{5}.$$

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng a , O là tâm của đáy và $SO = a$. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (SDC) . Tính $\sin \alpha$

Lời giải



$$\text{Ta có: } \sin \alpha = \frac{d(A; (SDC))}{SA} = \frac{2d(O; (SDC))}{SA}$$

$$\text{Dựng } OI \perp BC \text{ tại } I, OK \perp SI \text{ tại } K \Rightarrow OK = d(O; (SDC)).$$

$$\text{Do } ABCD \text{ là hình vuông nên } I \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow OI = \frac{a}{2}.$$

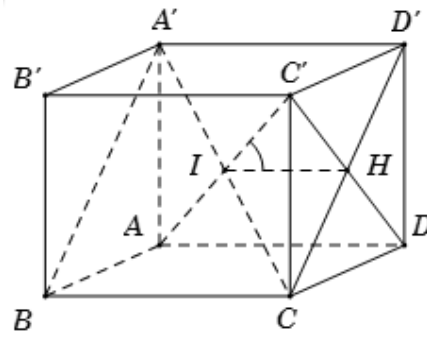
$$\text{Ta có: } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{30}}.$$

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$. Tính $\tan \varphi$

Lời giải

Ta có hình vẽ



Gọi $I = A'C \cap AC'$, $H = C'D \cap CD'$.

Ta có $C'D \perp CD'$, $C'D \perp A'D'$ suy ra $C'D \perp (A'BCD')$

Từ đó suy ra $C'H \perp (A'BCD')$

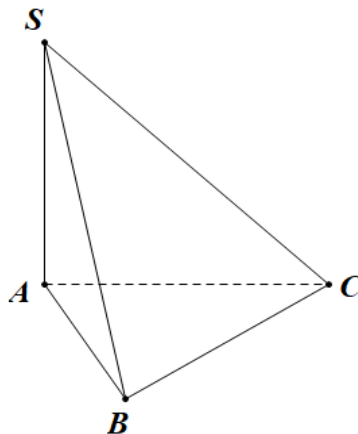
$\Rightarrow HI$ là hình chiếu vuông góc của $C'I$ lên $(A'BCD')$.

Do đó $(AC'; (A'BCD')) = (C'I; (A'BCD')) = (C'I; HI) = C'IH = \varphi$.

Trong $\triangle C'HI$ vuông tại H ta có $\tan \varphi = \tan C'IH = \frac{C'H}{IH} = \frac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{\frac{AB}{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AB = 2a$, $BC = 2a\sqrt{3}$, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) . Tính $\tan \alpha$

Lời giải



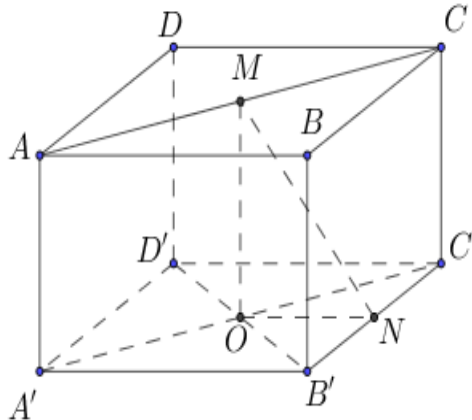
Ta có: $\left((SBC); (ABC) \right) = SBA = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a$.

Xét tam giác vuông ABC có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + 12a^2} = 4a$.

Góc $\left(SC; (ABC) \right) = SCA = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{2\sqrt{3}a}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$. Gọi α là góc hợp giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

Lời giải



Ta có M là trung điểm của $AC \Rightarrow M$ là tâm của hình vuông $ABCD$.

Gọi $O = A'C' \cap B'D' \Rightarrow MO \perp (A'B'C'D')$.

Ta có $MN \cap (A'B'C'D') = N \Rightarrow (MN, (A'B'C'D')) = MNO = \alpha$.

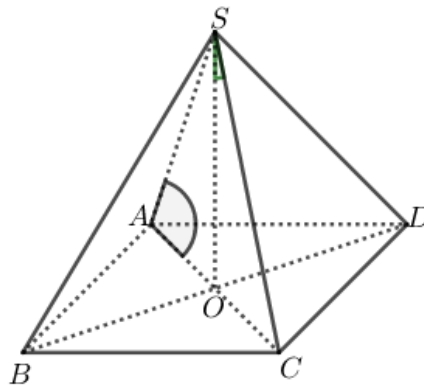
Gọi cạnh của hình lập phương bằng $a \Rightarrow ON = \frac{a}{2}$ và $OM = a$.

Tam giác MON vuông tại $O \Rightarrow MN = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \sin MNO = \frac{OM}{MN} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Vậy $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = SB = SC = SD$ cùng hợp với đáy một góc 30° . Tính góc hợp bởi đường thẳng SC với mặt phẳng (SBD)

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó: $(SA, (ABCD)) = (SA, OA) = \angle SAO = 30^\circ$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $CO \perp BD$ (1).

Ta có:
$$\left. \begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \\ CO \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SO \perp CO \text{ (2)}.$$

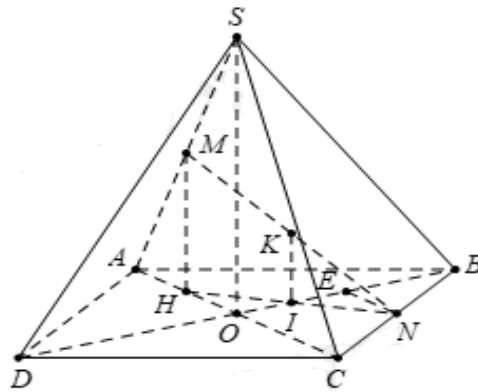
Từ (1) và (2) suy ra: $CO \perp (SBD) \Rightarrow SO$ là hình chiếu của SC lên (SBD) .

Do đó $(SC, (SBD)) = (SC, SO) = \angle CSO$. Vì $SA = SC \Rightarrow \triangle SAC$ cân tại $S \Rightarrow \angle SCO = \angle SAO = 30^\circ$.

Vậy góc hợp bởi đường thẳng SC với mặt phẳng (SBD) bằng 60° .

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính tan góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) ?

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$

Suy ra $(MN, (ABCD)) = (MN; HN) = \angle MNH = 60^\circ \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Gọi $I = HN \cap BD$, qua I kẻ đường thẳng $\parallel MH$ cắt MN tại K

Khi đó $K = MN \cap (SBD)$ và E là hình chiếu của N trên BD

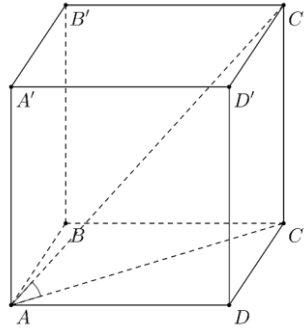
Suy ra $NE \perp (SBD) \Rightarrow (MN; (SBD)) = (NK; EK) = \angle NKE$

Tam giác NEK vuông tại E có $NE = \frac{OC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $NK = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

Ta có $\sin \angle NKE = \frac{EN}{NK} = \frac{a\sqrt{2}}{4} : \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \cos(MN; (SBD)) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

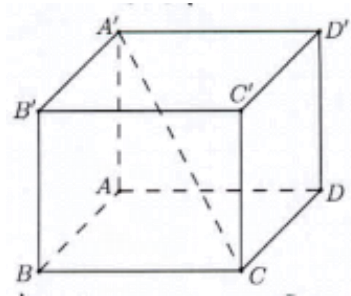
Chọn A

Ta có $(AC', (ABCD)) = (AC', AC) = C'AC = \alpha$.

Giả sử hình lập phương có cạnh là a

Trong tam giác $A'AC$ ta có $\sin \alpha = \frac{CC'}{AC'} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

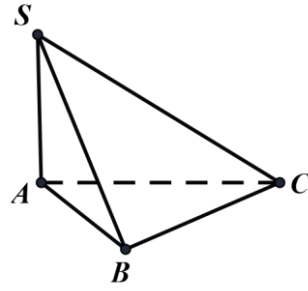
D. 90° .

Lời giải

Góc cần tìm là $A'CA = \alpha$. Vì đây là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ và

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{AC} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = \sqrt{2}a$. (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60° .

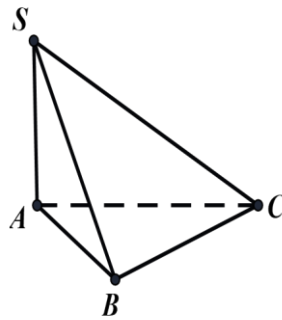
B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B

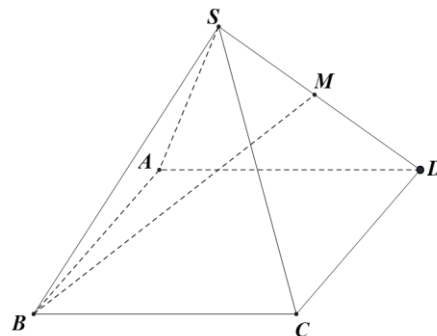


$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \cap (ABC) = \{C\} \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, AC) = SCA.$$

$$\text{Mà: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a = SA.$$

Vì $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên ta có $SCA = 45^\circ$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD . Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

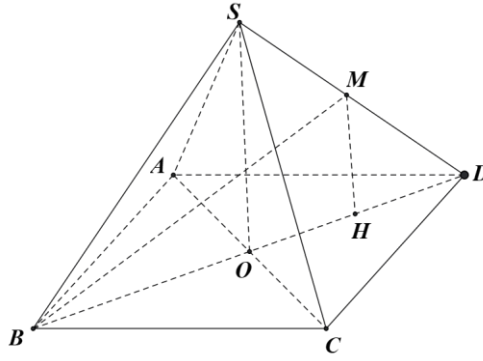
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông. Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi M là trung điểm của OD ta có $MH \parallel SO$ nên H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$ và $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là MBH .

$$\text{Khi đó ta có } \tan MBH = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{3}$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 90° .

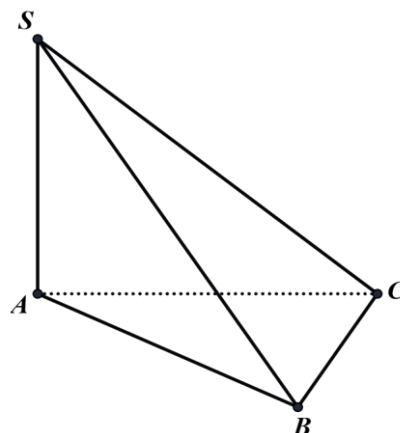
B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn D



Ta có: SA vuông góc với mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow A$ là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC)

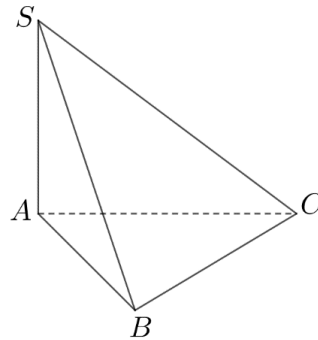
$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow [SC, (ABC)] = (SC, AC) = SCA$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$$

$$\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow SCA = 45^\circ \Rightarrow [SC, (ABC)] = 45^\circ.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 30° .

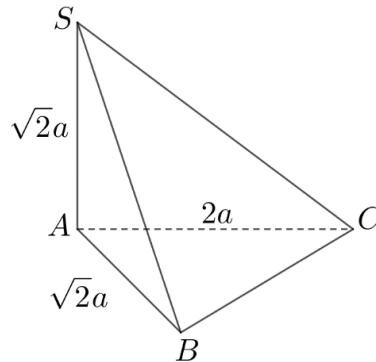
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SB \cap (ABC) = B$; $SA \perp (ABC)$ tại A .

$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (ABC) là AB .

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $\alpha = SBA$.

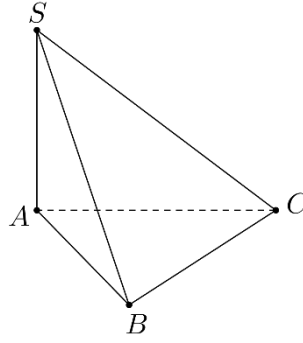
Do tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ nên $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a = SA$.

Suy ra tam giác SAB vuông cân tại A .

Do đó: $\alpha = SBA = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ và có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = 3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{30}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

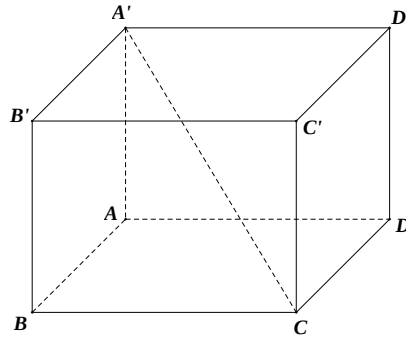
Chọn C

Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên $(SC, (ABC)) = \angle SCA$

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{10}$

Khi đó $\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{30}}{a\sqrt{10}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle SCA = 60^\circ$.

Câu 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2\sqrt{2}a$, $AA' = \sqrt{3}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45° .

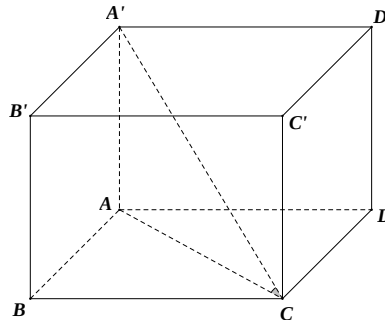
B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $(A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = \angle ACA'$.

Trong tam giác ABC vuông tại A , có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 8a^2} = 3a$.

Trong tam giác ACA' vuông tại A , có: $\tan ACA' = \frac{AA'}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ACA' = 30^\circ$.

Vậy $\left(A'C, (ABCD) \right) = 30^\circ$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$, gọi M là trung điểm của SC . Tính cosin của góc α là góc giữa đường thẳng BM và (ABC) .

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{14}$.

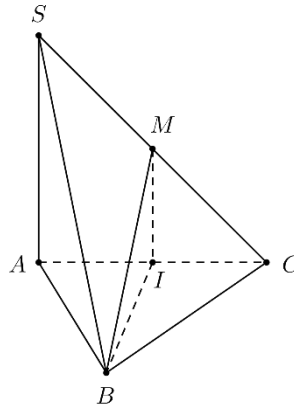
B. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \perp (ABC)$

Ta có: $MI \perp (ABC)$ nên BI là hình chiếu vuông góc của BM lên (ABC)

$\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng BM và (ABC) là góc $MBI = \alpha$.

Xét tam giác SAC , $MI = \frac{1}{2} \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$

Xét tam giác đều ABC cạnh a , có BI là đường cao nên $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác BIM vuông tại I , nên $BM = \sqrt{MI^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{BI}{BM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 45° .

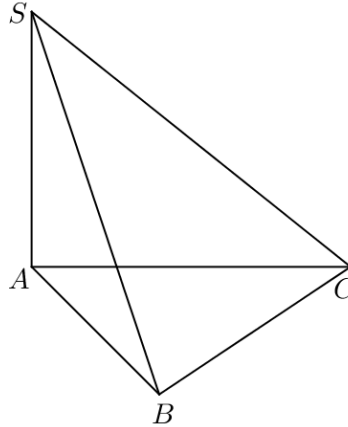
B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SB, (ABC)) = SBA$.

Trong tam giác vuông SAB ta có $\tan SBA = \frac{SA}{AB} = 1 \Rightarrow SBA = 45^\circ$. Vậy $(SB, (ABC)) = 45^\circ$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng

A. 60° .

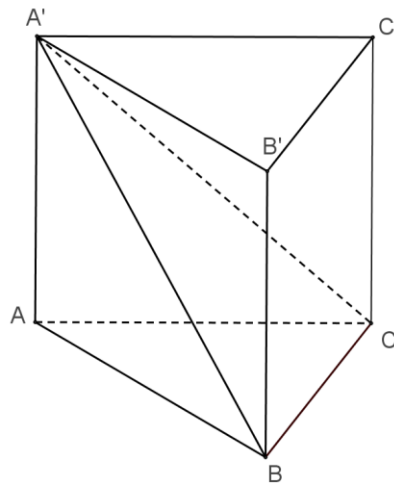
B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(AA'B'B)$ là $CA'B$.

Ta có: $A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$, $BC = AB = a$

$\Rightarrow \tan CA'B = \frac{BC}{A'B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow CA'B = 30^\circ$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. 30° .

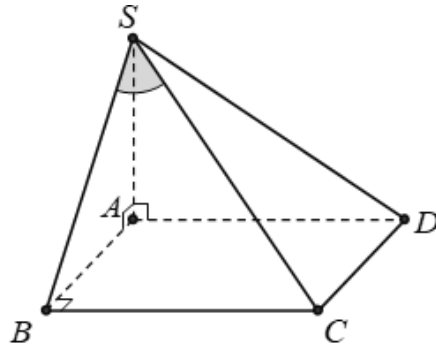
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A



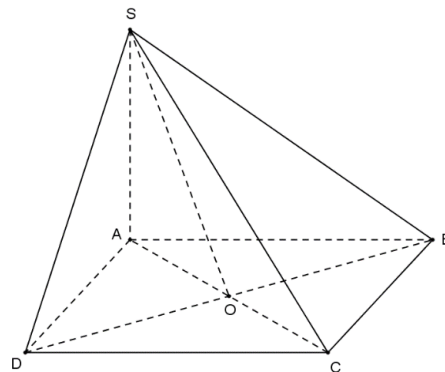
Có $CB \perp (SAB)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa đường thẳng SC và SB .

$$\text{Có } SB = a\sqrt{3}; \tan CSB = \frac{CB}{SB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow CSB = 30^\circ.$$

- Câu 13:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O ; tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$; $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:
- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

Chọn A



$$\text{Do tam giác } ABD \text{ đều cạnh } a\sqrt{2} \text{ nên } AO = a\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Do $SA \perp (ABCD)$ nên AO là hình chiếu của SO lên mặt phẳng $(ABCD)$

$$\Rightarrow (SO; (ABCD)) = (SO; AO) = SOA \text{ (do tam giác } SAO \text{ vuông tại } A)$$

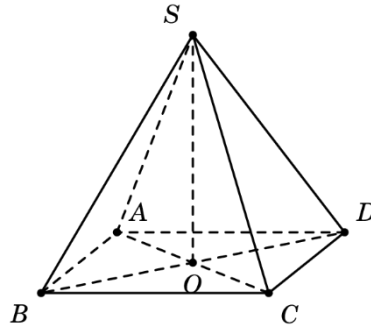
$$\text{Mà } \tan SOA = \frac{SA}{AO} = \sqrt{3} \Rightarrow (SO; (ABCD)) = SOA = 60^\circ.$$

- Câu 14:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính tan của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{7}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SAO .

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AO = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại O nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Từ đó suy ra $\tan SAO = \frac{SO}{AO} = \sqrt{7}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $ACB = 60^\circ$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45° .

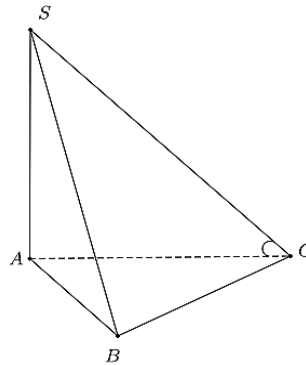
B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA \perp (ABC)$ suy ra AC là hình chiếu của SC trên (ABC) .

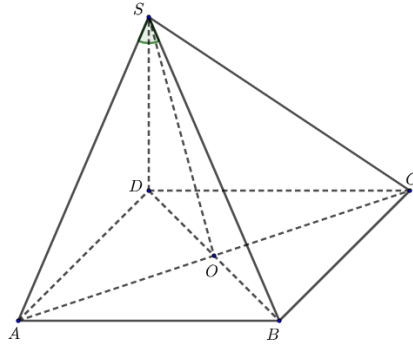
Suy ra góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa SC và AC bằng góc SCA .

Trong tam giác ABC vuông tại B ta có $AC = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác SAC vuông tại A ta có $\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \sqrt{3}$. Suy ra $SCA = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .



- A. 60° . B. $\arcsin \frac{1}{4}$. C. 45° . D. 30° .

Lời giải

Ta có: $SA \cap (SBD) = \{S\}$

Lại có $AO \perp BD$; $AO \perp SD \Rightarrow AO \perp (SBD)$ nên $(SA, (SBD)) = OSA$.

$$\triangle SDA \text{ có: } SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Hình vuông } ABCD \text{ có: } AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

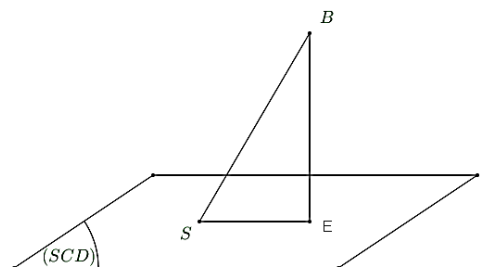
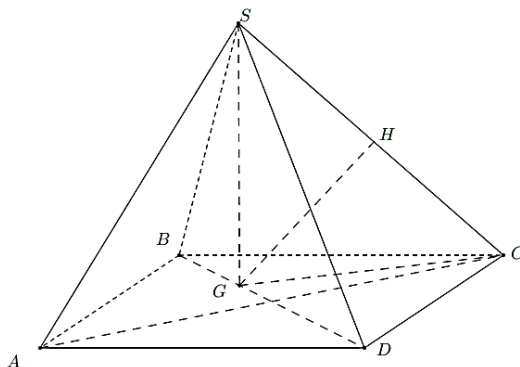
$$\triangle SAO \text{ có: } \sin OSA = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow OSA = 30^\circ.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a ; $\angle ABC = 60^\circ$ và $SB = a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) . Tính $\sin \varphi$.

- A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin \varphi = \frac{1}{4}$. C. $\sin \varphi = \frac{1}{2}$. D. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Vì } \begin{cases} AB = AC = a \\ ABC = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều cạnh } a.$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$.

Gọi E là hình chiếu của B trên (SCD) nên SE là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SCD)

$\Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt phẳng (SCD) là góc giữa hai đường thẳng SB, SE và bằng BSE

$\Rightarrow BSE = \varphi$.

Ta có $BE = d(B, (SCD))$.

$$BG \cap (SCD) = D \Rightarrow \frac{d(B, (SCD))}{d(G, (SCD))} = \frac{BG}{GC} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, CD) = \frac{3}{2} d(G, (SCD))$$

Kẻ $GH \perp SC$ tại H (1).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp CG \\ CD \perp SG \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCG) \Rightarrow CD \perp HG \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $GH \perp (SCD) \Rightarrow d(G, (SCD)) = GH$.

$$CG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét tam giác } SBG \text{ vuông tại } G \text{ có } SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác } SCG \text{ vuông tại } G \text{ ta có } \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GC^2} = \frac{9}{6a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow HG = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow BE = \frac{3}{2} HG = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Xét tam giác } SEB \text{ vuông tại } E \text{ ta có } \sin \varphi = \frac{BE}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy là trung điểm M của cạnh AD , $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi N là trung điểm của cạnh BC . Tính $\sin$ của góc giữa SN và mặt phẳng (SBM) .

A. $\frac{2}{\sqrt{35}}$.

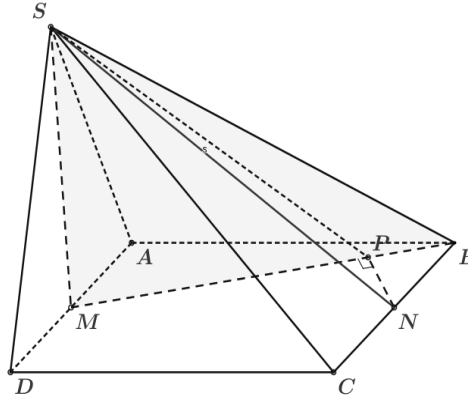
B. $\frac{3}{\sqrt{35}}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $NP \perp MB$. Ta có: $\begin{cases} NP \perp MB \\ NP \perp SM \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SBM) \Rightarrow (SN, (SBM)) = NSP$

Xét tam giác vuông SNM , ta có: $SN^2 = SM^2 + MN^2 \Rightarrow SN = \frac{\sqrt{7}}{2}a$

Xét tam giác vuông NBM , ta có: $\frac{1}{NP^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{NB^2} \Rightarrow NP = \frac{1}{\sqrt{5}}a$

Xét tam giác vuông SNP , ta có: $\sin NSP = \frac{NP}{NS} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{35}}$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. 45° .

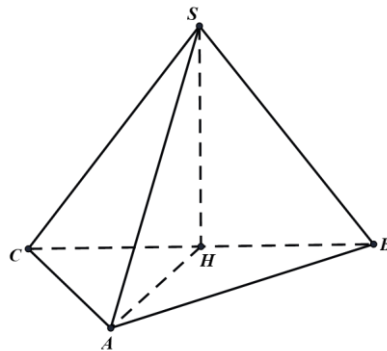
B. 60° .

C. 30° .

D. 75° .

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC , (SBC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên ta có $SH \perp (ABC)$.

Khi đó ta có hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC) là AH . Suy ra góc giữa SA và (ABC) bằng góc giữa SA và AH bằng góc SAH .

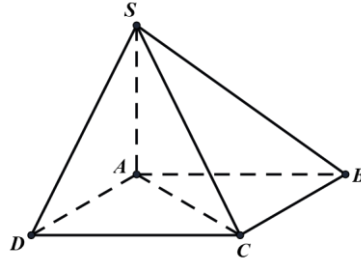
Ta có: $AH = \frac{1}{2}BC$, $SH = BC \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó trong tam giác SAH ta có $\tan SHA = \frac{SH}{AH} = \sqrt{3}$.

Vậy góc $SAH = 60^0$.

- Câu 20:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
- A. 45^0 . B. 30^0 . C. 60^0 . D. 90^0 .

Lời giải

Chọn B



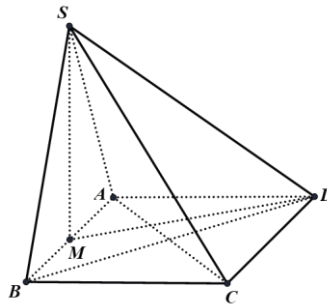
$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC; (ABCD)) = SCA$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$$

$$\Delta SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan SCA = \frac{AS}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SCA = 30^0.$$

- Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABCD$ gọi M là trung điểm cạnh AB . Biết đáy là hình vuông cạnh bằng a , $SM \perp (ABCD)$, tam giác SAB đều (minh họa như hình vẽ).



Kí hiệu φ góc giữa SD và $(ABCD)$, khi đó $\tan \varphi$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì tam giác SAB đều nên M là trung điểm của AB và $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\varphi = (SD, (ABCD)) = (SD, DM) = \angle SDM$, $MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$

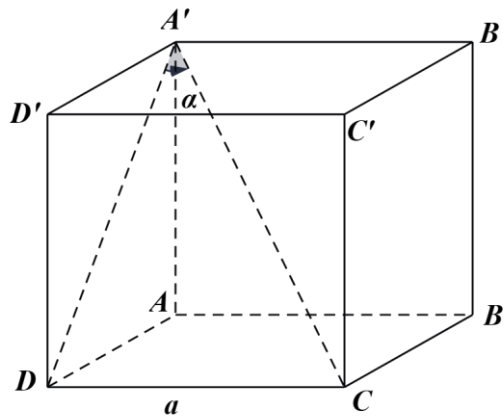
Mặt khác, $\tan \angle SDM = \frac{SM}{MD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi α là góc giữa $A'C$ và $(ADD'A')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ADD'A')$.

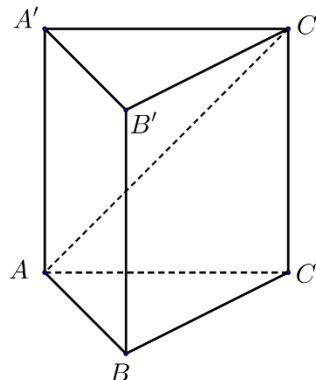
Suy ra $A'D$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(A'D'DA) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{CD}{A'D} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'B = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{3}$. Góc giữa $C'A$ và mp (ABC) bằng

- A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải

Chọn D

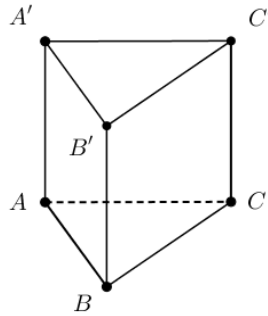


Ta có $B'B = a \Rightarrow CC' = a$ và $AC = a\sqrt{3}$

Góc giữa $C'A$ và mp (ABC) bằng góc đường thẳng $C'A$ và CA bằng góc $C'AC$

$$\tan C'AC = \frac{C'C}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow C'AC = 30^\circ.$$

Câu 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có cạnh $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$ và cạnh $AA' = \sqrt{15}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 30° .

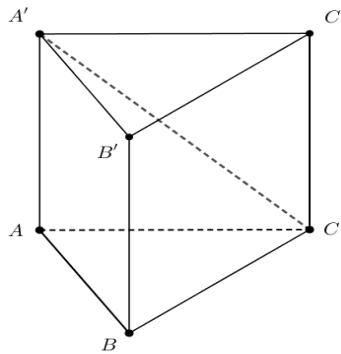
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: AC là hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC) .

Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) là góc $A'CA$.

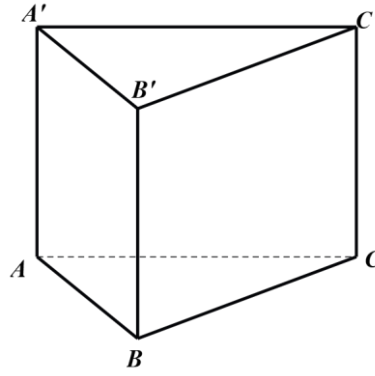
$$\text{Lại có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } A'AC \text{ có } \tan A'CA = \frac{AA'}{AC} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3}.$$

Suy ra $A'CA = 60^\circ$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết tam giác ABC vuông tại B ,

$AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của $A'B'$. Tính góc giữa đường thẳng CI và mặt phẳng (ABC) .



A. 30° .

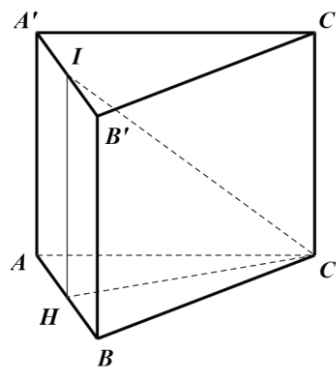
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi α là góc giữa đường thẳng CI và mặt phẳng (ABC) .

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (ABC) , suy ra H là trung điểm của AB .

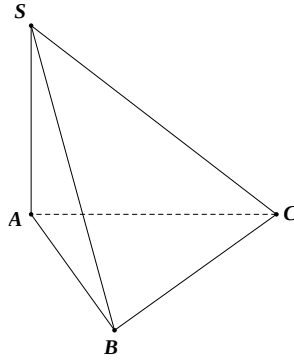
Khi đó $\alpha = (CH, CI) = ICH$.

Xét tam giác IHC vuông tại H , có:

$$IH = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{3a}{2}$$

$$\tan ICH = \frac{IH}{CH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } \alpha = (CH, CI) = ICH = 30^\circ.$$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{15}a$ (tham khảo hình bên dưới)



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Do SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng đáy. Từ đó suy ra: $(SC; (ABC)) = (SC; AC) = SCA$ do tam giác SAC vuông tại A nên góc $0 < SCA < 90^\circ$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$.

Trong tam giác SAC vuông tại A có: $\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{15}a}{\sqrt{5}a} = \sqrt{3} \Rightarrow SCA = 60^\circ$.

Vậy $(SC; (ABC)) = 60^\circ$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S , $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là

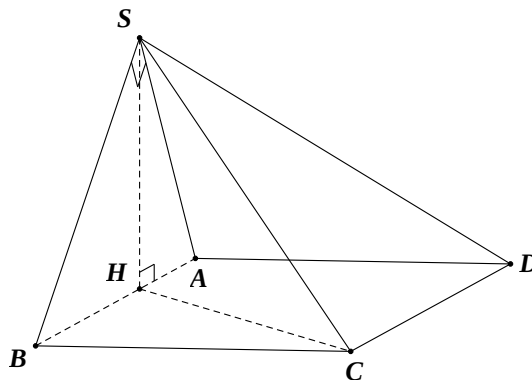
A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải



Chọn B

Kẻ $SH \perp AB$ tại H , suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $(SC, (ABCD)) = (SC, HC) = SCH$.

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = 2a; \quad HB = \frac{SB^2}{BA} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a;$$

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{5}{2}a; \quad SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan SCH = \frac{SH}{HC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{5a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S , $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. Giá trị $\tan$ của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

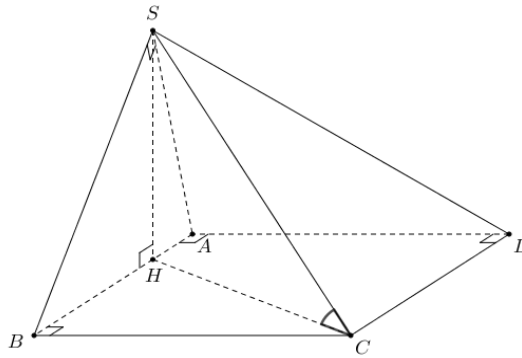
B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $SH \perp AB$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Do đó góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc SCH .

$$\text{Xét } \triangle SAB \text{ vuông tại } S \text{ ta có: } AB^2 = SA^2 + SB^2 \Leftrightarrow AB^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a.$$

$$\text{Xét } \triangle SAB \text{ vuông tại } S \text{ và có } SH \perp AB \text{ nên } SH \cdot AB = SA \cdot SB \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{a \cdot \sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Xét $\triangle SHB$ vuông tại H ta có: $SB^2 = SH^2 + BH^2 \Leftrightarrow (\sqrt{3}a)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + BH^2$

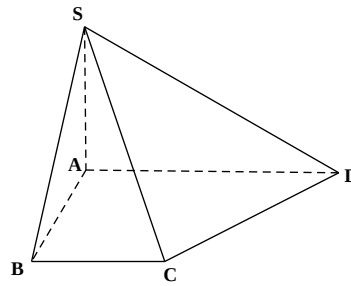
$$\Leftrightarrow BH^2 = \frac{9}{4}a^2 \Rightarrow BH = \frac{3}{2}a.$$

Xét $\triangle BHC$ vuông tại B ta có: $CH^2 = BH^2 + BC^2 \Leftrightarrow CH^2 = \frac{9}{4}a^2 + (2a)^2$

$$\Leftrightarrow CH^2 = \frac{25}{4}a^2 \Rightarrow CH = \frac{5}{2}a.$$

$$\text{Vậy } \tan SCH = \frac{SH}{HC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{5}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) bằng



A. 30° .

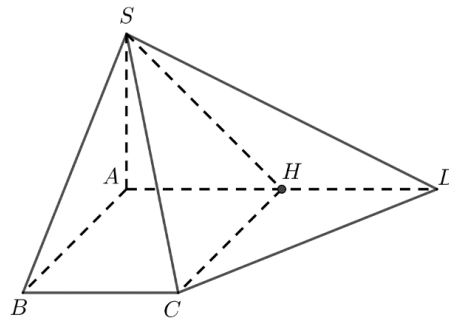
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AD , khi đó SH là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAD)

Suy ra góc giữa SC và (SAD) là góc CSH .

Tam giác SHC vuông tại H và có $CH = a$, $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Ta có: } \tan CSH = \frac{CH}{SH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow CSH = 30^\circ.$$

Câu 30: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

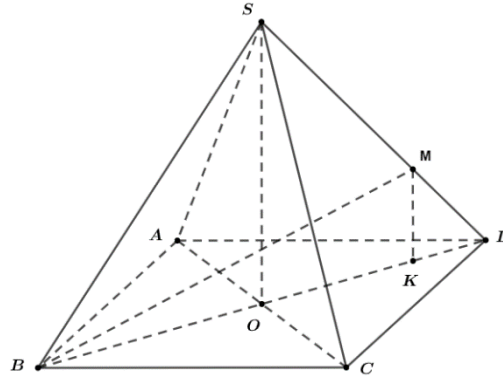
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



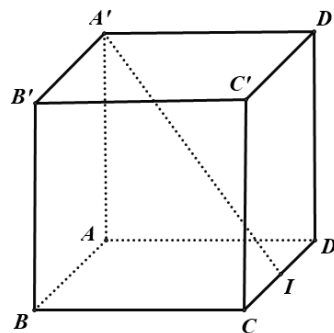
Có $ABCD$ là hình vuông; $BD = a\sqrt{2}$; $OD = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Trong $\triangle SOD$ dựng $MK \perp SO$ suy ra $MK \perp (ABCD)$; $\frac{MK}{SO} = \frac{MD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MK = \frac{SO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

Ta có góc giữa BM và $(ABCD)$ bằng MBK ; $\tan MBK = \frac{MK}{BK}$

$BK = BO + OK = OD + \frac{2OD}{3} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$ suy ra $\tan MBK = \frac{MK}{BK} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{6}{5a\sqrt{2}} = \frac{1}{5}$

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và tam giác ACD vuông cân tại A , $AC = 2a$. Biết $A'C$ tạo với đáy một góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Gọi I là trung điểm CD . Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $(A'CD)$ bằng



A. 45° .

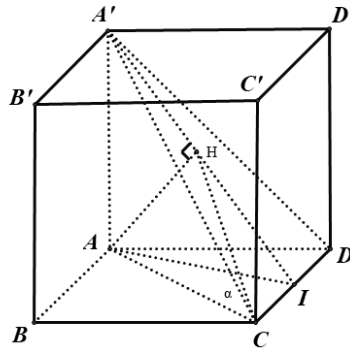
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(A'AI)$, kẻ $AH \perp A'I$ ($H \in A'I$).

Ta có A là hình chiếu vuông góc của A' lên $(ABCD)$.

Do đó AC là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(ABCD)$.

Suy ra $(A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = A'CA = \alpha$ (vì $\triangle A'AC$ vuông tại A).

Xét $\triangle A'AC$ vuông tại A , ta có : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \tan \alpha = \frac{A'A}{AC} = \frac{A'A}{2a} \Leftrightarrow A'A = a\sqrt{2}$.

Vì tam giác ACD vuông cân tại A nên AI vừa là đường trung tuyến, đồng thời là đường cao ứng với cạnh CD . Do đó $AI \perp CD$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} AI \perp CD \\ A'A \perp CD \\ A'A, AI \subset (AA'I) \\ A'A \cap AI = A \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (A'AI)$. Mà $AH \subset (A'AI)$ nên $CD \perp AH$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} AH \perp A'I \\ AH \perp CD \\ A'I, CD \subset (A'CD) \\ A'I \cap CD = I \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (A'CD)$.

Ta có H là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'CD)$.

Do đó HC là hình chiếu vuông góc của AC lên $(A'CD)$.

Suy ra $(AC, (A'CD)) = (AC, HC) = HCA$ (vì $\triangle AHC$ vuông tại H).

Xét $\triangle ADC$ vuông cân tại A , ta có : $AI = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.AC.\sqrt{2} = \frac{1}{2}.2a.\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $A'AI$ vuông tại A , ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow AH = a.$$

Xét $\triangle HAC$ vuông tại H , ta có : $\sin HCA = \frac{AH}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow HCA = 30^\circ$.

Vậy $(AC, (A'CD)) = 30^\circ$.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AC' và $(A'BCD')$. Khi đó giá trị của $\tan \alpha$ bằng

A. 1.

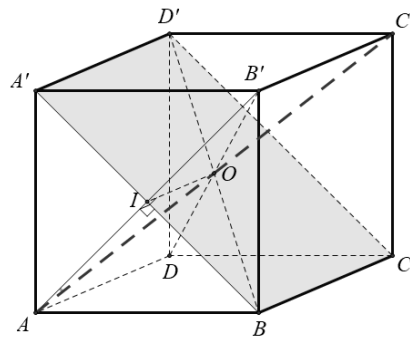
B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình chữ nhật $A'BCD'$, thì O cũng là tâm của hình chữ nhật $AB'C'D$.

Gọi I là tâm hình vuông $ABB'A'$, tức $AI \perp A'B$. Mà $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AI$.

Do đó $AI \perp (A'BCD')$, suy ra góc giữa AC' và $(A'BCD')$ bằng góc giữa AO và OI , tức là $\alpha = AOI$.

Trong tam giác AOI vuông tại I : $\tan \alpha = \tan AOI = \frac{AI}{IO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $BAD = 60^\circ$. Biết

$SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD với (SBC) . Tính giá trị $\sin \alpha$.

A. $\frac{1}{3}$.

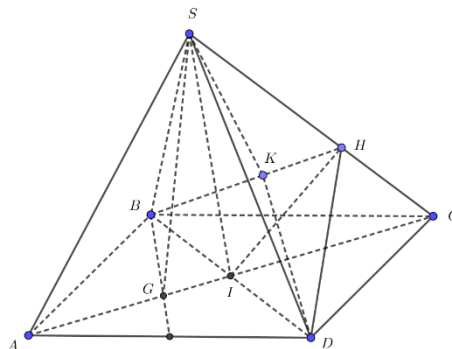
B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



Xét tam giác ABD ta có : $AB = AD = a$; $BAD = 60^\circ$. Suy ra tam giác ABD đều cạnh a .

Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

Vì $SA = SB = SD$ nên SG là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD . Suy ra

$SG \perp (ABCD)$. Suy ra $SG \perp DI$ mà $AC \perp DI$. Suy ra $DI \perp (SAC) \Rightarrow SC$. Suy ra $DI \perp SC$.

Dựng $IH \perp SC (H \in SC)$. Suy ra $SC \perp (DIH)$ mà $SC \subset (SBC)$. Suy ra $(DIH) \perp (SBC)$ mà $(SBC) \cap (DIH) = BH$. Dựng $DK \perp BH (K \in BH)$. Suy ra $DK \perp (SBC)$ tại K . Suy ra hình chiếu vuông góc của SD lên (SBC) là SK .

Suy ra $(SD; (SBC)) = (SD; SK) = DSK = \alpha$.

Xét tam giác SKD ta có $\sin \alpha = \frac{DK}{SD}$.

$$\text{Ta có } CG = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} \cdot 2AI = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3};$$

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}; SC = \sqrt{SG^2 + GC^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \triangle HIC \sim \triangle GSC (g - g) \Rightarrow \frac{HI}{GS} = \frac{IC}{SC} \Rightarrow HI = \frac{IC \cdot GS}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{35}}{14}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } BIH \text{ ta có } BH = \sqrt{BI^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle BHD} = \frac{1}{2} DK \cdot BH = \frac{1}{2} IH \cdot BD \Rightarrow DK = \frac{IH \cdot BD}{BH} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

$$\text{Suy ra } \sin \alpha = \frac{DK}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a$, và $SA \perp (ABC)$,

$SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 30° .

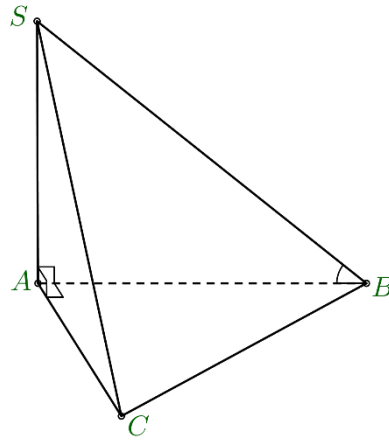
B. 75° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC , ta có: $2AB^2 = BC^2 = a^2 \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có: AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC) nên $(SB, (ABC)) = (SB, AB) = SBA$

Xét tam giác vuông SAB , ta có: $\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SBA = 60^\circ$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = a\sqrt{3}$. Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 30° .

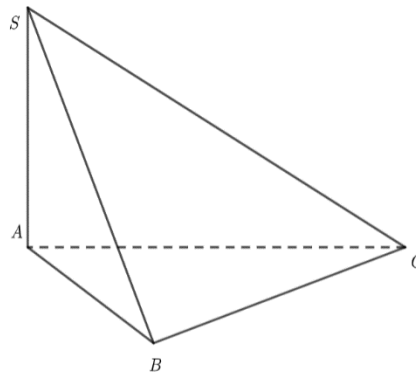
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C



Ta có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $(SC, (ABC)) = SCA$.

$BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC = a \Rightarrow \tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SCA = 60^\circ$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng ABC ?

A. 60°

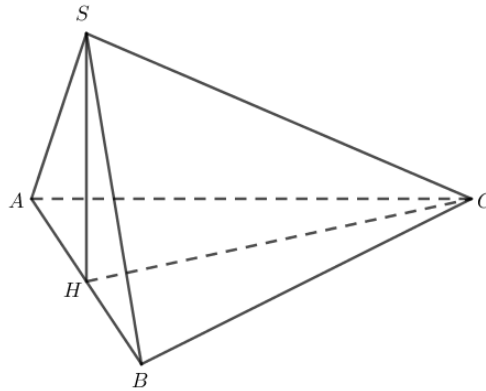
B. 30°

C. 45°

D. 90°

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB . Do tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên ta có: $SH = \frac{1}{2}AB = a$ và $SH \perp (ABC)$.

Suy ra: $(SC, (ABC)) = SCH$.

ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$ nên $CH = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SCH vuông tại H có: $\tan SCH = \frac{SH}{CH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $(SC, (ABC)) = 30^\circ$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M ; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Khi đó góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN) bằng

A. 45°

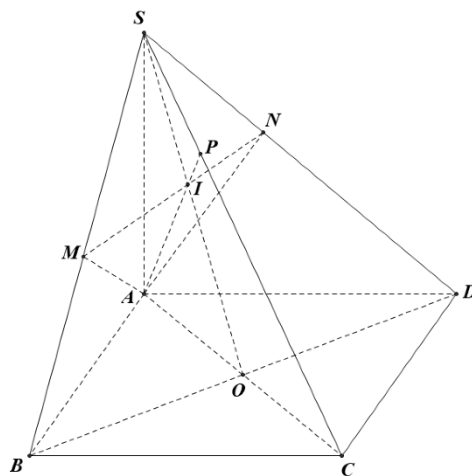
B. 60°

C. 30°

D. 90°

Lời giải

Chọn B



Gọi $AC \cap BD = O$, $SO \cap MN = I$, $AI \cap SC = P$.

$AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$ và $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$, do đó: $SC \perp (AMN)$ hay

$$SC \perp (AMPN).$$

$$\text{Suy ra: } (SB, (AMN)) = (SM, (AMPN)) = SMP.$$

$$\text{Ta có: } SM = \frac{SA^2}{SB} = \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}; \quad SP = \frac{SA^2}{SC} = \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2 + 2a^2}} = a.$$

$$\text{Nên } \sin SMP = \frac{SP}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SMP = 60^\circ.$$

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{5}$, đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) . Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

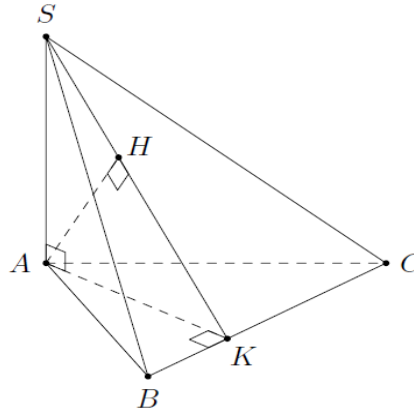
B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B



Dựng AK vuông góc BC , AH vuông góc SK .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH \text{ mà } AH \perp SK \text{ nên } AH \perp (SBC).$$

Do đó SK là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SBC) nên

$$\alpha = (SA, (SBC)) = (SA, SK) = ASK.$$

$$\text{Ta có } AK = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Khi đó, } \tan \alpha = \frac{AK}{AS} = \frac{\frac{2a\sqrt{5}}{5}}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{5}.$$

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, SC . Góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng.

A. 45° .

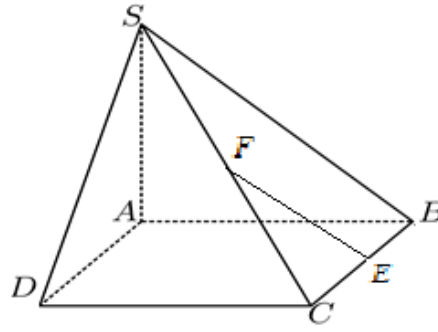
B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (EF, (SAD)) = (BS, (SAD)) = (BS, AS) = BS \cap A.$

Xét tam giác SAB vuông tại A và có $SA = AB$ suy ra $BS \cap A = 45^\circ$.

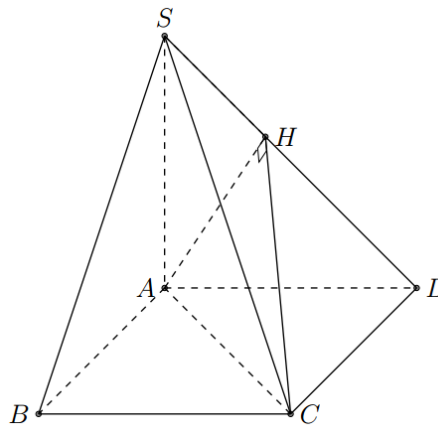
Vậy góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng 45° .

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB = a, SD = a\sqrt{5}$. Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SCD) thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(0^\circ; 20^\circ)$. B. $(20^\circ; 40^\circ)$. C. $(40^\circ; 60^\circ)$. D. $(60^\circ; 80^\circ)$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH \perp SD$ tại H .

Ta có $AH \perp CD$ (vì $CD \perp (SAD)$ và $AH \subset (SAD)$).

Suy ra $AH \perp (SCD)$.

Khi đó HC là hình chiếu vuông góc của AC lên mặt phẳng (SCD) .

Suy ra $(AC, (SCD)) = (AC, HC) = \angle ACH$.

Tam giác SAD vuông tại A và AH là đường cao nên

$$SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = 2a.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}}{5}a.$$

$$\text{Tam giác } AHC \text{ vuông tại } H \text{ nên } \sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow C = 39,23^\circ.$$

Câu 41: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

A. 45° .

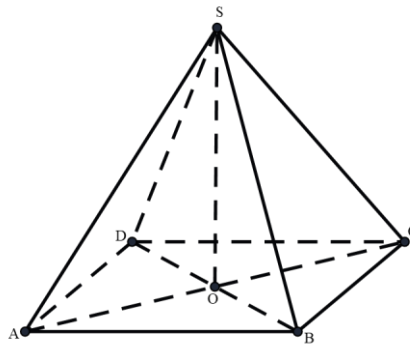
B. 75° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

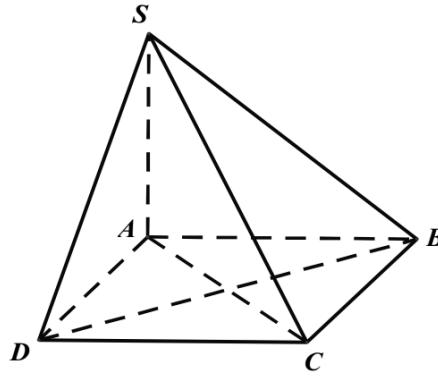
Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra AO là hình chiếu của AS trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow (SA, (ABCD)) = (SA; AO) = \angle SAO$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a suy ra $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOA : $\cos \angle SAO = \frac{AO}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle SAO = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 60° .

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$ (như hình vẽ minh họa). Số đo góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng:



A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

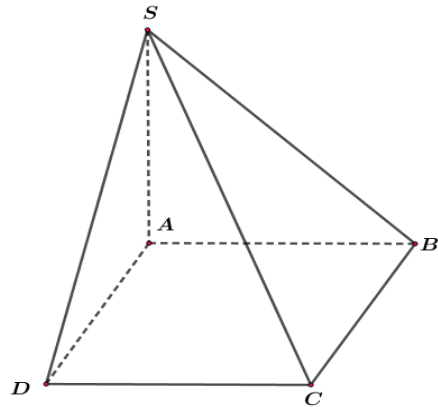
Ta có $DA \perp (SAB)$ suy ra SA là hình chiếu của SD lên mặt phẳng (SAB) .

Ta có $(SD, (SAB)) = (SD, SA) = ASD$.

Tam giác SAD vuông tại A có $\tan ASD = \frac{AD}{SA} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow ASD = 45^\circ$

Vậy $(SD, (SAB)) = 45^\circ$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông với $AC = 5\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 5$. Góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng



A. 45° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SD, (SAB)) = (SD, SA) = DSA$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = 5 \Rightarrow \tan DSA = \frac{AD}{SA} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow DSA = 45^\circ$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = CB = CA$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng

(ABC) trùng với trung điểm I của cạnh AB . Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45° .

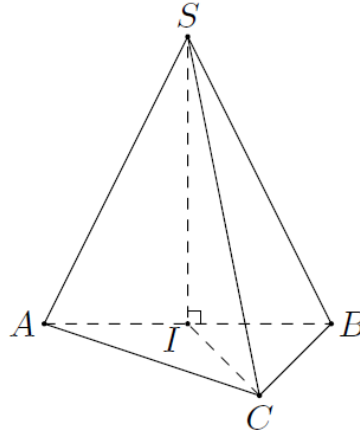
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn A

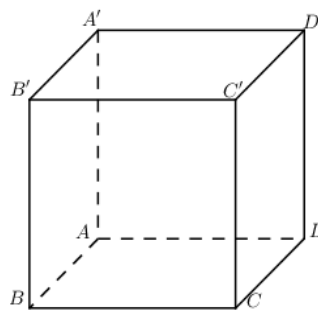


Nhận thấy rằng, $\triangle SAB = \triangle CAB$ do đó hai đường trung tuyến tương ứng bằng nhau tức $CI = SI$.

Vậy tam giác SIC vuông tại I và có $CI = SI$ nên đây là tam giác vuông cân.

Do đó $SCI = 45^\circ$ đây cũng chính là góc giữa SC và (ABC) .

Câu 45: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{2}, BC = a, AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45° .

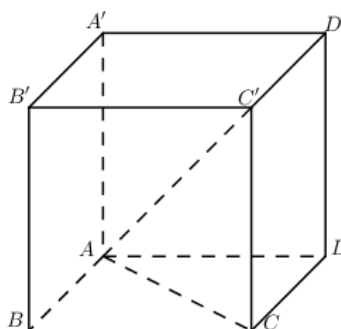
B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC' \cap (ABCD) = A$.

Mặt khác, $C'C \perp (ABCD)$ tại $C \Rightarrow AC$ là hình chiếu của AC' lên $(ABCD)$

Vậy góc giữa AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa AC' và AC bằng $C'AC$.

Xét tam giác $C'AC$ vuông tại C , có $CC' = a\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \Delta C'AC$ vuông cân tại C . Vậy $C'AC = 45^\circ$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Hãy tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 45° .

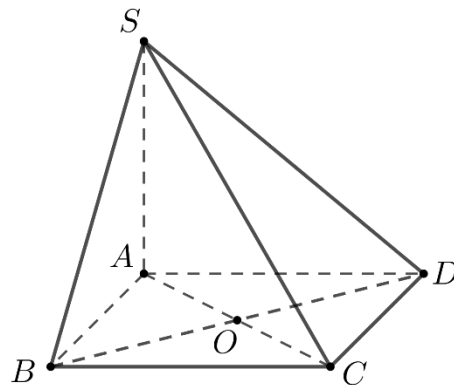
B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SO, (ABCD)) = (SO, AO) = SOA$.

Tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2} \Rightarrow AO = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại A có $\tan SOA = \frac{SA}{AO} = \sqrt{3} \Rightarrow SOA = 60^\circ$.

Vậy $(SO, (ABCD)) = 60^\circ$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cạnh SC tạo với mặt phẳng (ABC) một góc là φ . Tính $\tan \varphi$.

A. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

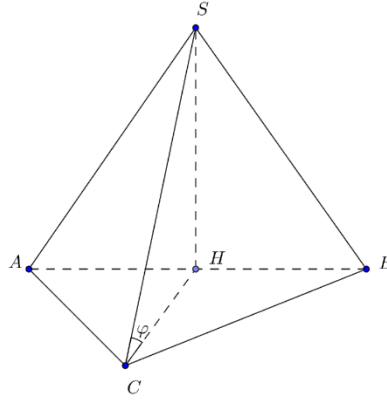
B. $\tan \varphi = \sqrt{3}$.

C. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $SH \perp AB$

Vì $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $\Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$\Rightarrow CH$ là hình chiếu của SC lên $(ABC) \Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, CH) = SCH = \varphi$

$\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại $C \Rightarrow CH = \frac{AB}{2}$

$\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$ suy ra $\tan \varphi = \frac{SH}{CH} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{AB} = \sqrt{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = a$ và $SC = a\sqrt{5}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60° .

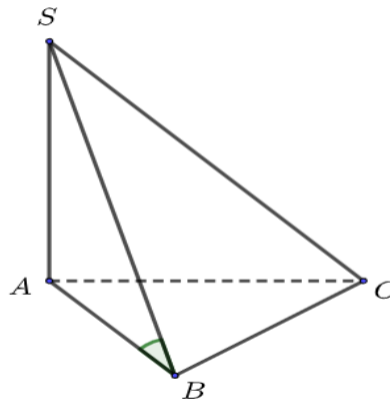
B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) .

Khi đó, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là góc giữa SB và AB hay góc SBA .

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

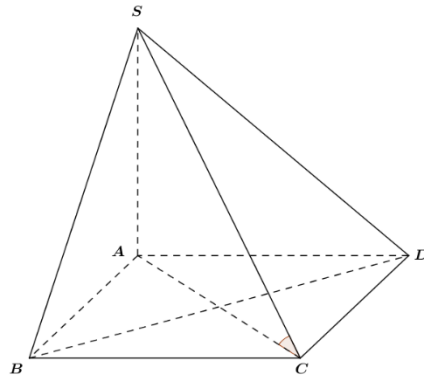
Tam giác SAC vuông tại A nên $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SBA = 60^\circ$.

- Câu 49:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$ và $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SA \perp (ABCD)$ suy ra hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AC

$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = SCA$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$$

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại A

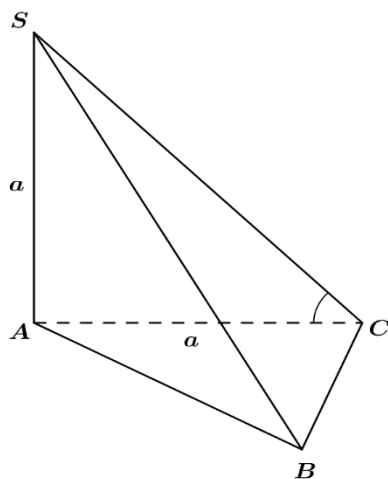
$$\Rightarrow \tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow SCA = 45^\circ.$$

- Câu 50:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$. Tìm góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ SC \cap (ABC) = C \end{array} \right\} \Rightarrow \text{hình chiếu vuông góc của } SC \text{ lên mặt phẳng } (ABC) \text{ là } AC \Rightarrow \text{góc}$$

giữa SC và mặt phẳng (ABC) là góc SCA .

$$\text{Trong tam giác } SAC \text{ vuông tại } A \text{ có: } \tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow SCA = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

Câu 51: Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = AD = a$ và $\angle A'AB = \angle A'AD = \angle BAD = 60^\circ$. Tính $\sin$ của góc giữa đường thẳng CD' và mặt phẳng $(A'AD)$:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

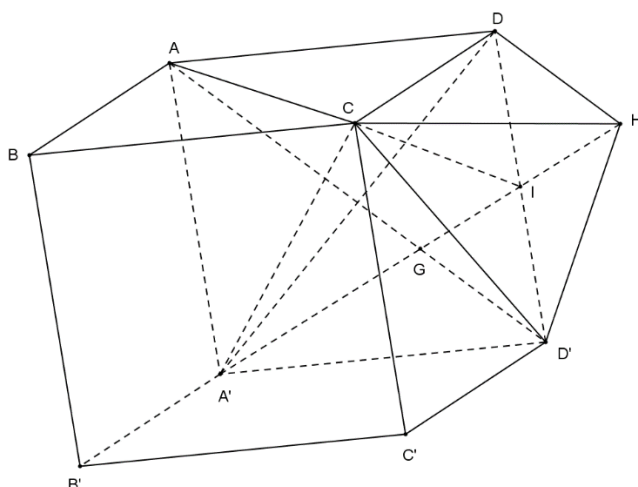
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm DD' ; G là trọng tâm tam giác $A'D'D$; H đối xứng với G qua I
 Từ gt $\Rightarrow$ Các tam giác $A'D'D$ và $CD'D$ là các tam giác đều $\Rightarrow AI \perp DD'$; $CI \perp DD'$
 $\Rightarrow DD' \perp (CIA') \Rightarrow DD' \perp CH$

$$\begin{aligned}
\text{Mà } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'H}) \cdot \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{CA'} + \frac{4}{3} \overrightarrow{A'I} \right) \cdot \overrightarrow{AD} = \left[\overrightarrow{CA'} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{A'D'}) \right] \cdot \overrightarrow{AD} \\
&= \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'} \right) \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} \\
&= -a^2 \cos 60^\circ + \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} a^2 \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow AD \perp CH
\end{aligned}$$

Do đó $CH \perp (A'AD) \Rightarrow D'H$ là hình chiếu của CD' trên $(A'AD)$

$$\Rightarrow (CD'; (A'AD)) = (CD'; HD')$$

Lại có: $CD' = a$; $D'H = D'G = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; tam giác $CD'H$ vuông tại H

$$\Rightarrow \cos(CD'; (A'AD)) = \cos CD'H = \frac{HD'}{CD'} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 52: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , AC cắt BD tại O . Khoảng cách giữa SA và CD bằng độ dài đoạn SO . Tính sin của góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.

A. $\frac{3}{5}$.

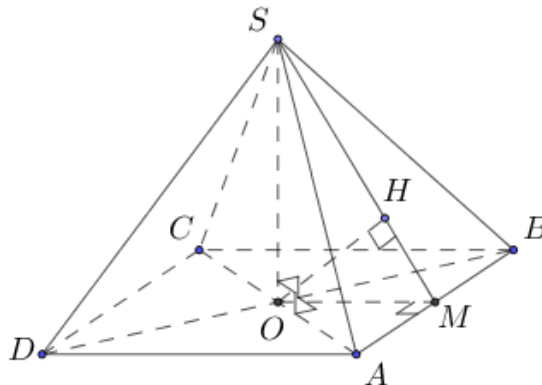
B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S.ABCD$ là chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow OM \perp AB$, $AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOM)$

Mà $AB \subset (SAB) \Rightarrow (SOM) \perp (SAB)$

$$\text{Kẻ } OH \perp SM, \text{ ta có } \begin{cases} (SOM) \perp (SAB) \\ (SOM) \cap (SAB) = SM \\ OH \subset (SOM), OH \perp SM \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH$$

Ta lại có $CD \parallel AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow CD \parallel (SAB)$

$$\Rightarrow d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = 2d(O, (SAB)) = 2OH \Rightarrow SO = 2OH$$

Vì $\triangle OHS$ vuông tại H , có $SO = 2OH \Rightarrow OSH = 30^\circ$

$$\text{Tam giác } SOM \text{ vuông tại } O, \text{ có } OM = \frac{a}{2} \Rightarrow SO = OM \cdot \cot OSM = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Ta có $SO \perp (ABCD), SA \cap (ABCD) = A \Rightarrow (SA, (ABCD)) = \angle SAO$

Tam giác SOA vuông tại O , có $OA = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ và $SO = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$$\Rightarrow \sin SAO = \frac{SO}{SA} = \frac{SO}{\sqrt{SO^2 + OA^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Vậy } \sin(SA, (ABCD)) = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Lưu ý: Các cạnh bên của hình chóp đều hợp với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

Câu 53: Cho tam giác ABC vuông tại A . Mặt phẳng (P) chứa BC và hợp với mặt phẳng (ABC) góc α , ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Gọi β , γ lần lượt là góc hợp bởi hai đường thẳng AB , AC và (P) . Tính giá trị biểu thức $P = \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$.

A. $P = 0$.

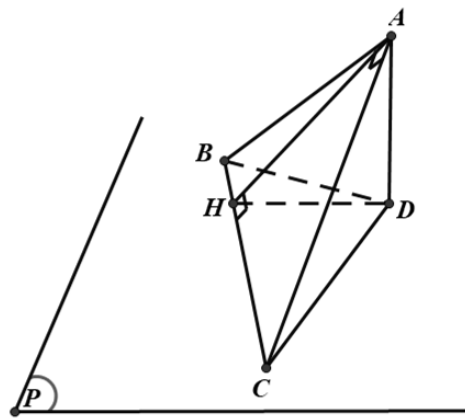
B. $P = -1$.

C. $P = 2$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên (P) .

Trong tam giác ABC kẻ đường cao AH .

$$\text{Khi đó: } \alpha = ((ABC), (P)) = (AH, HD) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AD}{AH} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{AD^2}{AH^2}.$$

$$\beta = (AB, (P)) = ABD \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{AD^2}{AB^2}.$$

$$\gamma = (AC, (P)) = ACD \Rightarrow \sin^2 \gamma = \frac{AD^2}{AC^2}.$$

$$P = \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 - \frac{AD^2}{AH^2} + \frac{AD^2}{AB^2} + \frac{AD^2}{AC^2} = 1 - AD^2 \cdot \left(\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2} - \frac{1}{AH^2} \right) = 1.$$

Do tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2}$.

-----**HẾT**-----